

**S I N T E F**

SELSKAPET FOR INDUSTRIELL OG TEKNISK FORSKNING  
VED NORGES TEKNISKE HØGSKOLE  
TRONDHEIM

DYNAMISK PROGRAMMERING  
OG DENS BRUK VED  
DRIFT AV VANNKRAFTSYSTEMER

Teknisk notat

SINTEF, Avd. Reguleringssteknikk		
Saksbehandlere: Magne Fjeld	Godkjendt: <i>Knut Grimnes</i> Knut Grimnes	Oppdrag nr.: 480158
	Dato: 1.7.1972	

## FORORD

Notatet er skrevet på basis av det innlegg som forfatteren ga på et orienterings- og diskusjonsmøte vedrørende matematisk, hydrologisk modellbygging, den 25.4.1972 på Vassdrags- og Havnelaboratoriet, Trondheim, der institusjonene NVE, EFI, TEV, Institutt for Reguleringssteknikk, Institutt for Elektriske Anlegg, VHL, Institutt for Vassbygging var representert. Dessuten møtte representanter fra firmaet Grøner og firmaet Røstad. Notatet er alt for kort til å gi egentlig innsikt, men er ment som en orientering. Interesserte kan gå til spesiallitteraturen for mer utførlige detaljer.

## SAMMENDRAG

Den grunnleggende algoritme i D.P. forklares kort, og dens sammenheng med resultatene fra en vannverdiberegning. Stokastisk D.P. introduseres, og hvordan i store trekk modeller for nedslagsfeltet trekkes inn i optimaliseringsberegningene.

Videre gis en kort oversikt over en del finesser i D.P. som reduserer behov for lagerplass og regnetid i datamaskinen. Til slutt gis en del kommentarer til vannverdimetoden.

Dens sammenheng med Dynamisk Programmering og Pontryagins Maksimumsprinsipp utredes.

## KONKLUSJON

En kombinasjon av 2 eller flere av de forskjellige finesser som kan anvendes i D.P., kan gi store besparelser for fremtidig beregningsarbeid.

Da til dels ferdige algoritmer og flytskjema i stor grad allerede forefinnes i litteraturen for disse finesser, synes det ikke å være noen stor utviklingsoppgave å lage et datamaskinprogram, som fortrinnsvis bør være generelt anvendbart. For å sikre at et slikt program også blir gitt en utforming som tilfredsstillende dagsaktuelle og nær fremtidige krav spesifikk for el.-verkene, bør et slikt

utviklingsarbeid mest hensiktsmessig foregå under ledelse av el.verkenes egne bransjeforskningsgrupper.

Likeledes påpekes muligheten for store besparelser i beregningsarbeidet ved parametrisering av pådraget, og bruk av moderne søkemetoder, som kort nevnt i avsnitt 8. Dette synes meget fristende å undersøke nærmere.

Det foreslås at gjennomføringen av et slikt arbeid blir tatt opp til vurdering.

### NOTASJONER

I notatet forekommer en del ordbruk og notasjonene som kan være ukjent for mange. Enkelte av disse er forklart nedenfor.

Optimalkriterium: For optimaliseringsproblem over et gitt tidsrom, er dette en sum (eller et integral) hvis minimum eller maksimum definerer optimalitet.

Algoritme: En forskrift (resept) på hvordan en beregning gjennomføres.

Preferansefunksjon: Dette begrep brukes i el.-forsyningen og er en  $\text{Min}(\cdot)$  marginalkostnadsfunksjon [øre/kWh] som funksjon av  $\underline{u}$  solgt og kjøpt effekt omkring fastkraftbehovet. Dette betyr at man har funnet minimum av innholdet i parentesene over alle aktuelle funksjoner  $\underline{u}$ .

Pådrag  $\underline{u}$ : Styrbare (manipulerbare) tidsvariable i et system. (Som tappingen,  $\text{m}^3/\text{døgn}$ ).

Tilstand  $\underline{x}$ : Fysiske tidsvariable som sier noe om systemets tilstand. Tilstander må definisjonsmessig være beskrevet ved differensiallikninger,  $\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}, \underline{u})$  (eller tids-diskretiserte sådanne).  
Eksempel: Magasinvolument ( $\text{m}^3$ ).

Forstyrrelse  $\underline{v}$ : Ikke styrbare (manipulerbare) tidsvariable som påvirker systemet. Eksempel: Uregulert tilsig. Tilfeldige komponenter i kraftteterspørsel, etc.

K

$\sum_{j=1}^K (\cdot)$ : Symboliserer en sum, der innholdet i parenteser summeres over løpende indeks  $j$ , fra  $j=1$  til  $j=K$ .

- Trajektor: Det totale tidsforløp av en tilstand  $x(t)$  når gitte "inputs" påtrykkes.
- Vannverdimetode: Dette begrep betraktes av forfatteren som et "varemerke" på spesielle antakelser, en spesiell måte å utføre beregningene på i en optimalisering oppgave, slik de i hovedtrekkene fremgår i en artikkel av Lindqvist [6], og slik de i det vesentlige utføres her til lands. Prinsippet er å beregne kurver gjennom punkter med samme grense-vannverdi.
- Deterministisk problem: Problemet er eksakt definert uten innvirkning av tilfeldige (ukjente) variable.
- Stokastisk problem: I denne sammenheng betyr det at det forøvrig deterministiske problem har en komponent av usikkerhet. Denne usikkerhet skriver seg fra at tidsfunksjoner med en statistisk fordeling også påvirker et system.
- $E\{\cdot\}$ : Betyr at den matematiske forventede verdi (middelvei) av innholdet i parenteser beregnes.
- Parametre: Konstante eller langsomt varierende faktorer (tall) som karakteriserer systemet.  
Eksempel: Maksimalt magasinivolum, virkningsgrad, diffusjonskonstant, etc.

INNHALDSFORTEGNELSE

	Side
FORORD .....	I
SAMMENDRAG .....	I
KONKLUSJON .....	I
NOTASJONER .....	II
INNHALDSFORTEGNELSE .....	IV
1. INNLEDNING .....	1
2. GENERELT .....	1
3. DYNAMISK PROGRAMMERING. GRUNNLEGGENDE ALGORITME. FORMULERING AV PROBLEMET .....	3
4. STOKASTISK DYNAMISK PROGRAMMERING .....	7
5. INKLUDERING AV MODELL FOR NEDSLAGSFELTET .....	9
6. REGNETEKNISKE FINESSER I D.P. ....	12
7. AVSLUTTENDE BEMERKNINGER TIL ANVENDELSE AV D.P. ....	17
8. SAMMENHENG MELLOM VANNVERDIMETODEN OG PONTYAGINS MAKSIMUMSPRINSIPP/DYNAMISK PROGRAMMERING (P.M./D.P.) .....	19
LITTERATUR .....	33

## 1. INNLEDNING

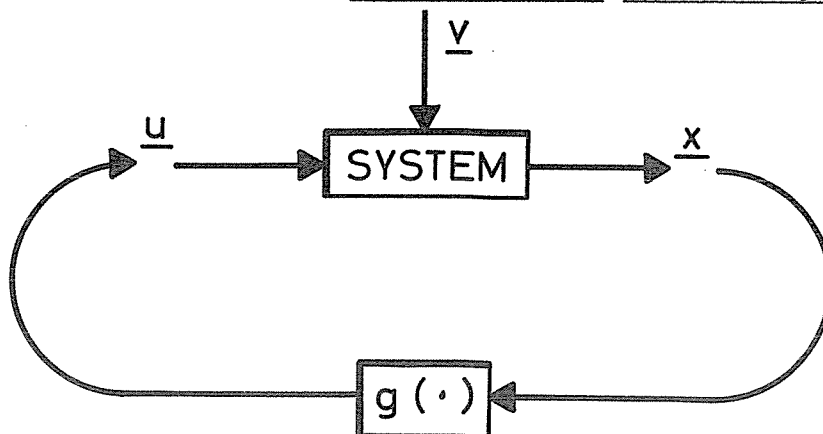
Skjønt Dynamisk Programmering (D.P.) lenge har eksistert som et i prinsippet meget generelt verktøy for dynamiske optimaliseringsberegninger, har anvendbarheten vært svært begrenset på grunn av store krav til lagerplass og regnetid for standard-algoritmen. Det er dette forhold som også avspeiler seg i den nå meget benyttede "vannverdimetode". I løpet av de aller siste år er det imidlertid utviklet beregningstekniske finesser i D.P. som i høy grad minsker både behov for hurtiglagerplass og regnetid. Hensikten med dette notat er for det første å gi en kvalitativ, relativt overfladisk oversikt over disse teknikker. For det andre er hensikten å se dette i sammenheng med de beregninger av optimal drift for vasskraftverk.

## 2. GENERELT

Hensikten med optimalisering av prosessen generelt er å utnytte de foreliggende ressurser på en definert, best mulig måte, og/eller å gi produktet de optimale egenskaper, da også definert ut i fra gitte kriterier. Optimalkriteriet er pålagt visse sidebetingelser som må oppfylles. De viktigste av disse er selve prosess-likningene, i denne sammenheng likninger for kraftverk og nedslagsfelt. System-beskrivelse + optimalkriterium resulterer i en optimal reguleringsstrategi, som kan være av formen (t er tid)

$$\underline{u}(t) = \underline{g}(\underline{x}(t)) \quad (1)$$

der  $\underline{u}$  er pådragsvektor,  $\underline{x}$  er tilstandsvektor [1] for systemet, og  $\underline{g}$  er en vektorfunksjon, som er resultatet av optimaliseringsberegningen. Dette er en tilbakekoplet reguleringsstrategi, se figur 1.



Figur 1

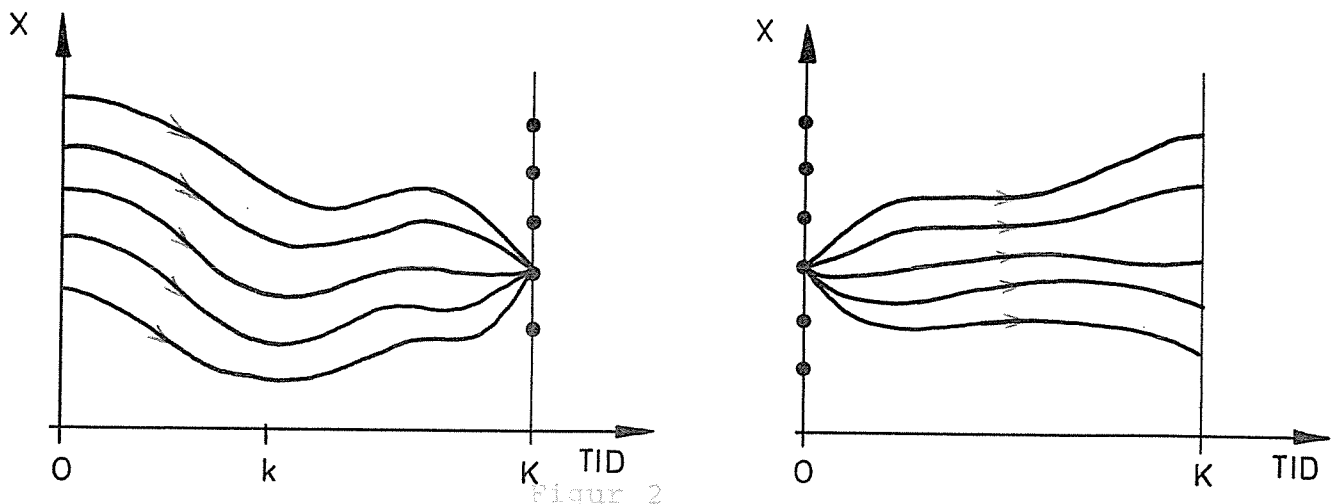
Denne struktur har - idet det henvises til grunnleggende regulerings teknikk - fordeler når forstyrrelser  $y$  av tilfeldig, ukjent karakter påvirker den prosess vi ønsker å regulere. For et gitt optimaliseringsintervall kan det også tenkes at løsningen på problemet finnes på formen

$$\underline{u}(t) = \underline{r}(t) \tag{2}$$

Dette er en løsning av typen "åpen sløyfe". Funksjonen  $g(\cdot)$  behøver nødvendigvis ikke være en analytisk funksjon, den kan foreligge som en tabell. Som vi senere skal se, er dette tilfelle ved såkalt bakover-D.P., når den anvendes på generelle, ulineære prosesser.

Her skal gis en oversikt over metoder som vesentlig kan plasseres i 2 grupper, A og B. Gruppe A gir tilbakekoblede reguleringsstrategier som løsning. Disse metoder reduseres først og fremst behovet for hurtiglagerplass vesentlig, mens regnetiden kan være omtrent den samme, eller ikke minker i samme grad.

I gruppe B har en metoder som tar utgangspunkt i en optimalisering fra en gitt initialtilstand, eller en første gjetning på den optimale trajektor. Her oppnås store besparelser i både regnetid og hurtiglagerplass, når dette utgangspunktet passer. Grunnen til besparelsene er blant annet at aktuelt søkeområde i tilstandsrommet her kan begrenses.



PROBLEMER  
GRUPPE A.

PROBLEMER  
GRUPPE B.

Figur 2

Fra metodene i gruppe B er det ikke alltid enkelt å finne en tilbakekoplet løsning for avvikende trajektorer.

For å gi en formell oppfatning av hva D.P. dreier seg om, og hva de nyeste teknikker fører med seg, er det nødvendig å få et overblikk over den vanligste formulering, og dens løsning, som bygger på optimalitetsprinsippet. Det letteste, og pedagogisk sett det riktige, er å først ta det deterministiske tilfelle.

### 3. DYNAMISK PROGRAMMERING. GRUNNLEGGENDE ALGORITME. FORMULERING AV PROBLEMET

$$\text{Prosess: } \underline{x}(k+1) = \Phi(\underline{x}(k), \underline{u}(k), k) \quad (3)$$

(Hydrologisk modell, magasiner, virkningsgrader etc.)

Optimalkriterium:

$$J = \sum_{k=0}^K L(\underline{x}(k), \underline{u}(k), k) \rightarrow \text{Min.} \quad (4)$$

Begrensninger:

$$\underline{x} \in X \in E^n$$

$$\underline{u} \in U \in E^r$$

Initialbetingelser:

$$\underline{x}(0) = \underline{c}$$

$L(\cdot)$  er en "objektfunksjon" eller en kostnadsfunksjon (fortjenestefunksjon). F.eks. ved økonomisk optimalisering av driften av et vasskraftverk er gitt en såkalt "preferansefunksjon", som kan f.eks. fremstilles som øre/kWh som funksjon av  $P_R - P$ , der

$P$  = total produsert effekt

$P_R$  = primakraftbehovet

Preferansefunksjonen kan gjerne være en funksjon av tiden  $k$ , benevnen med  $C(P_R - P)$ . Da blir

$$L = L(P, k) = \int_0^{P_R - P} C(\mu) d\mu \quad (5)$$



der dimensjonen til L blir øre/time. Videre er  $P = P(\underline{u})$  der  $\underline{u}$  er pådragene.

En slik optimaliseringsoppgave er altså kjennetegnet ved at optimalkriteriet primært er en funksjon av  $P - P_R$ , der P er en funksjon av pådragene og  $P_R$  er en (gitt) funksjon av tiden.

### Oppgave

Finn  $\underline{u}(0), \underline{u}(1), \dots, \underline{u}(K)$  slik at integrert kostnad pr. time (det vil si, total kostnad) minimaliseres, samtidig med at de andre oppgitte betingelser er oppfylte.

### Løsning (Formell)

Ifølge optimalitetsprinsippet, må - hva enn tilstanden  $\underline{x}(k)$  ved tid k er - den resterende del  $[k, K]$  av intervallet  $[0, K]$  også være optimalt. (Dette kan vises ved selvmotsigelse).

Kaller vi den minimale kost ved tid k for  $I(\underline{x}, k)$ , k vilkårlig i  $[0, K]$ ,

$$I(\underline{x}, k) = \text{Min}_{\substack{\underline{u}(j) \\ j=k, \dots, K}} \left\{ \sum_{j=k}^K L(\underline{x}(j), \underline{u}(j), j) \right\} \quad (6)$$

der  $\underline{x}(k) = \underline{x}$ . Summasjonen deles nå i to, et ledd for  $j=k$ , og summen fra  $j=k+1$  til K:

$$I(\underline{x}, k) = \text{Min}_{\underline{u}(k)} \text{Min}_{\substack{\underline{u}(j) \\ j=k+1, \dots, K}} \left\{ L(\underline{x}, \underline{u}(k), k) + \sum_{j=k+1}^K L[\underline{x}(j), \underline{u}(j), j] \right\} \quad (7)$$

Første ledd påvirkes ikke av minimalisering nr. 2, slik at (7) blir

$$I(\underline{x}, k) = \text{Min}_{\underline{u}(k)} \left\{ L(\underline{x}, \underline{u}(k), k) + \text{Min}_{\substack{\underline{u}(j) \\ j=k+1, \dots, K}} \left[ \sum_{j=k+1}^K L(\underline{x}(j), \underline{u}(j), j) \right] \right\} \quad (8)$$

2. ledd er imidlertid lik definisjonen (6), men med argument  $\Phi(\underline{x}, \underline{u}(k), k)$ ,  $k+1$ :

$$I(\underline{x}, k) = \text{Min}_{\underline{u}} \left\{ L(\underline{x}, \underline{u}, k) + I(\Phi(\underline{x}, \underline{u}, k), k+1) \right\} \quad (9)$$

der  $\underline{u} = \underline{u}(k)$ .

Dette er den matematiske formulering av Bellmans optimalitetsprinsipp, og sier ganske enkelt at minimum kost i tilstand  $\underline{x}$  ved tid  $k$  finnes ved å velge det pådraget  $\underline{u}$  som minimaliserer summen av kosten på det nåværende tidspunkt  $k$ , og den minimale kost til sluttidspunktet fra tilstanden ved tidspunkt  $k+1$  - som kommer frem ved å anvende dette minimaliserende pådrag. Merk at  $I(\underline{x}, 0) = J_{\min}$ .

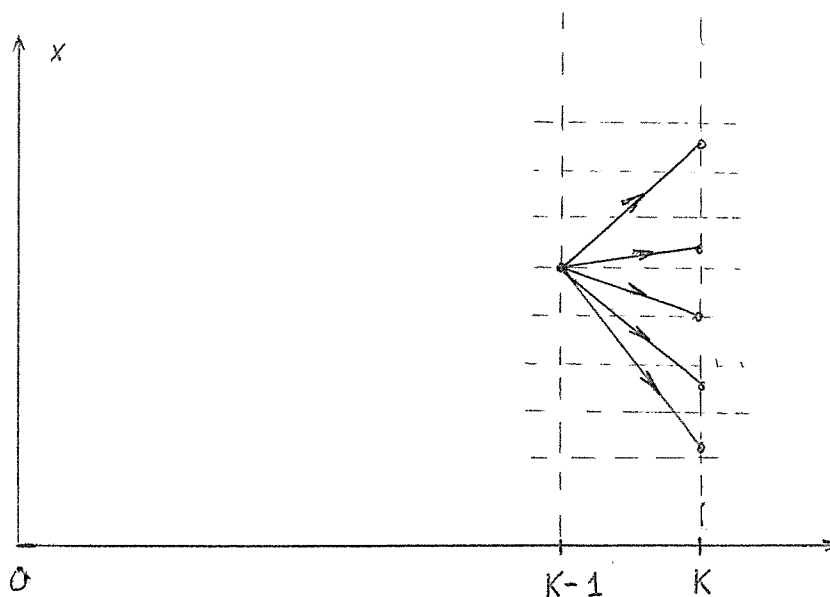
En direkte løsning av (9) foretas ved å starte bakfra, ved  $k = K$ .  $x_i$  kvantiseres, likedan  $u_i$ . Ved siste trinn fås

$$I(\underline{x}, K) = \text{Min}_{\underline{u}} \left\{ L(\underline{x}, \underline{u}, K) \right\}$$

Merk at  $I$  er en funksjon av tilstanden  $\underline{x}$ . Ved trinn  $K-1$ :

$$I(\underline{x}, K-1) = \text{Min}_{\underline{u}} \left\{ L(\underline{x}, \underline{u}, K-1) + I(\underline{x}, K) \right\}$$

Ved hver av de kvantiserte  $\underline{x}$  ved tid  $K-1$ , anvendes hver av de kvantiserte  $\underline{u}$ , og neste tilstand (ved  $K$ ) beregnes som  $\underline{x}(K) = \Phi(\underline{x}, \underline{u}, K-1)$ . Se figur 3.



Figur 3

Nå er det klart at  $\underline{x}(K)$  med tilhørende  $I(\underline{x}, K)$  med tilhørende  $I(\underline{x}, K)$  ikke nødvendigvis treffer i et knutepunkt. Interpolasjon

benyttes da for å finne  $\underline{u}(K-1)$  og tilhørende  $I(\underline{x}, K-1)$ , som beregnes direkte.

Prosedyren fortsetter på dette viset. Merk at en får frem en tilbakekoplet reguleringsstruktur. Hvilken tilstand vi enn plukker ut ved tid  $k$ , så er det beregnet en optimal regulerings fra  $k$  til  $K$ .

Er slutttilstanden gitt, er det viktig å legge merke til at beregningene snevres sterkt inn. Er  $\underline{x}(K) = \underline{x}_K$ , finnes tilhørende  $\underline{x}(K-1)$  med valgt  $\underline{u}(K-1)$  av

$$\underline{x}(K) = \Phi(\underline{x}(K-1), \underline{u}(K-1), K) \tag{10}$$

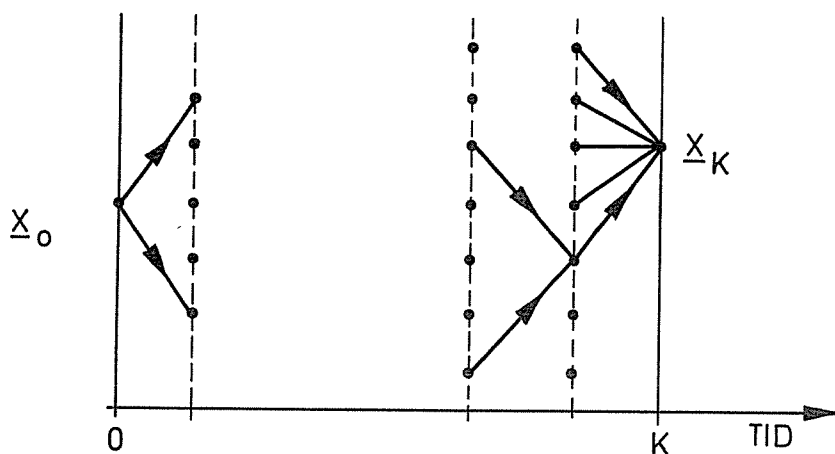
F.eks. for et lineært system

$$\underline{x}(k+1) = \Phi(k)\underline{x}(k) + \gamma(k)\underline{u}(k)$$

blir

$$\underline{x}(K-1) = \Phi(K-1)^{-1} [\gamma(K-1)\underline{u}(K-1) - \underline{x}(K)]$$

Begrensninger  $\underline{u}_{\max}$ ,  $\underline{u}_{\min}$  på  $\underline{u}$  vil da begrense aktuelt område for  $\underline{x}(K-1)$ . Dette forhold forplantes videre bakover. Se figur 4.



Figur 4

Ved tid 0 gjør også et tilsvarende forhold seg gjeldende, om tilstanden her er gitt.

Dette er altså de viktigste prinsipper bak D.P. i sin konvensjonelle form.

Her kan det være passende å knytte sammenhengen til de såkalte vannverdikurver, for enkelhets skyld forklart ut fra et magasin og i det deterministiske tilfelle. Tenker vi oss at det er

beregnet optimale trajektorer ved bakover - D.P. Trekker vi nå et snitt i alle tidspunkt  $k$ , vil vi til hver tilstand  $\underline{x}(k)$  ha tabulert en  $\underline{u}_{opt}$ . Går en så inn i marginalpris-funksjonen, vil det til denne verdi av  $\underline{u}_{opt}$  svare en  $(P_R - P)$ , og funksjonen gir tilhørende pris pr. kWh. Det vil si at dette er prisen for den sist produserte kWh. Trekk nå kurver gjennom punkter med samme marginalpris, fås "iso-marginalpris"-kurver, grensekostkurver, eller de såkalte vannverdikurver. Verdien ved fullt magasin settes lik null i alle tilfelle. Disse kan nå brukes i beslutningen om produsert kvantum i forhold til mulig kjøpt, idet vi alltid holder tilbake vann som har en vannverdi som er høyere enn den aktuelle markedspris, eller omvendt produserer all den kraft som kan selges til en pris som ligger høyere enn den aktuelle vannverdi.

#### 4. STOKASTISK DYNAMISK PROGRAMMERING

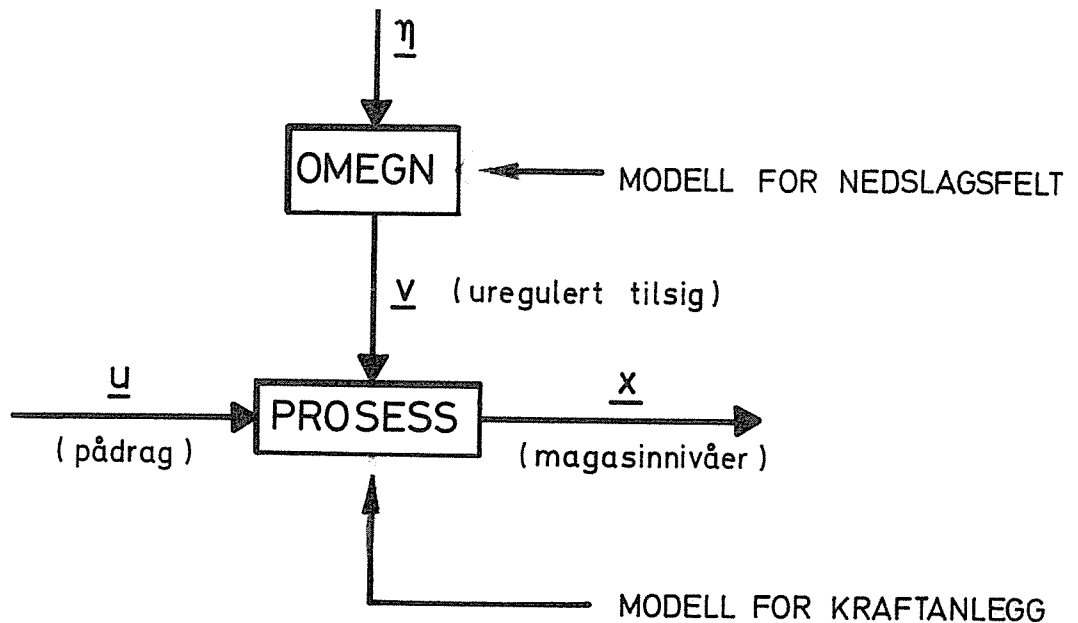
Når optimalisering over et lengre intervall inn i fremtiden skal utføres, og systemet er utsatt for blant annet stokastiske påvirkninger, har det egentlig ikke lenger noen mening å arbeide med kriteriet  $J$  i (4), men med

$$J = E\{J\} \rightarrow \text{Min} \quad (11)$$

det vil si, en minimalisering av forventet kostnad [ $E(\cdot)$  er forventningsoperatoren]. Det er denne type optimalisering som er aktuelt for optimalisering i vasskraftdriften, når lengre optimaliseringsintervaller betraktes.

Et karakteristisk trekk ved D.P. er at beregningene i prinsippet ikke endres vesentlig ved den nye problemstilling.

Prosessen er altså nå påvirket av "støy"  $\underline{v}$ , som genereres fra en dynamisk omegn til prosessen. Denne omegn er eksistert av "hvit støy"  $\underline{\eta}(k)$  (det vil si, at kovariansen  $E\{\underline{\eta}(k)\underline{\eta}^T(j)\} = 0$  når  $j \neq k$ , og lik en konstant (matrise) når  $j = k$ ). Prosess og omegn kan i vårt tilfelle identifiseres som modell for kraftanlegg, henholdsvis modell for nedslagsfelt. Se figur 5.



Figur 5

Prosessen er beskrevet av

$$\underline{x}(k+1) = \Phi(\underline{x}(k), \underline{u}(k), \underline{v}(k), k) \quad (12)$$

Tilsvarende som under avsnitt 3 settes

$$I(\underline{x}, k) = \text{Min}_{\substack{\underline{u}(j) \\ j=k, \dots, K}} \left\{ \text{E}_{\substack{\underline{v}(j) \\ j=k, \dots, K}} \left\{ \sum_{j=k}^K L(\underline{x}(j), \underline{u}(j), \underline{v}(j), j) \right\} \right\} \quad (13)$$

der  $\underline{x}(k) = \underline{x}$ . Om  $\underline{v}(k), \underline{v}(k+1), \dots$  er ukorrelerte (dette er tilfelle om  $\underline{v}(k) = \eta(k)$ ), kan en analogt utviklingen i avsnitt 3 få frem funksjonallikningen

$$I(\underline{x}, k) = \text{Min}_{\underline{u}} \left\{ \text{E}_{\underline{v}(k)} \left\{ L(\underline{x}, \underline{u}, \underline{v}, k) + I(\Phi(\underline{x}, \underline{u}, \underline{v}, k), k+1) \right\} \right\} \quad (14)$$

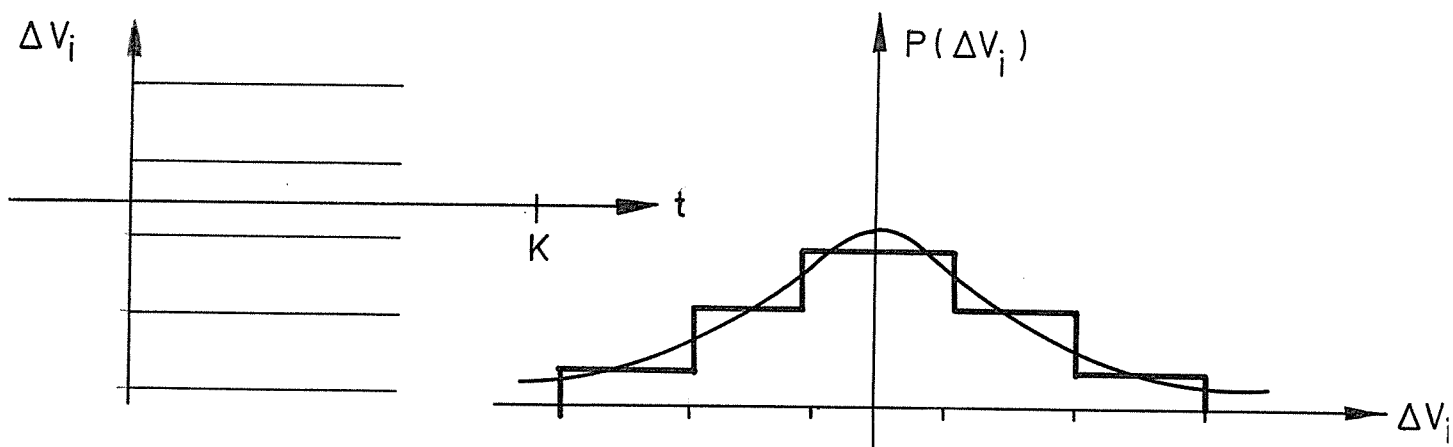
som angir den grunnleggende D.P.-algoritmen i dette tilfelle. Ved slutten av intervallet er

$$I(\underline{x}, K) = \text{Min}_{\underline{u}} \left\{ \text{E}_{\underline{v}} \left\{ L(\underline{x}, \underline{u}, \underline{v}, K) \right\} \right\} \quad (15)$$

I parentes kan det bemerkes at ved vannverdiberegningene gjøres den forenkling at  $\underline{v}(k+1)$  er ukorrelert med  $\underline{v}(k)$ . Denne forenkling er mindre og mindre tillatelig, jo større "tidskonstanten" i denne korrelasjon er, sammenliknet med optimaliseringsintervallet.

Det såkalte "enhetshydrogrammets" tidsforløp for grunnvannstilsiget kan i mange tilfelle indikere "tidskonstanter" på 1 - 3 måneder. Dette vil da kunne ha en betydelig effekt på resultatet av beregningene for det første trinn fra  $k = 0$  av.

Forventningsberegningen i (14) utføres mest rasjonelt ved å kvantifisere den stokastiske variable  $\underline{v}$  og dens tilhørende sannsynlighetstetthet. Se figur 6.



Figur 6

$\underline{v}(k)$  tenkes sammensatt av en gitt deterministisk funksjon  $\underline{v}_0(k)$  (historisk middelerdi) pluss den stokastiske del  $\Delta\underline{v}$ .

$$\underline{v}(k) = \underline{v}_0(k) + \Delta\underline{v}(k) \quad (16)$$

Om alle komponentene  $v_i$  er uavhengige, utføres forventningsberegningene nå ved enkel summering. F.eks. er ved siste trinn.

$$\begin{aligned}
 E\{L(\underline{x}, \underline{u}, \underline{v}, K)\} &= E\{L(\underline{x}, \underline{u}, \underline{v}_0, \Delta v_1, \Delta v_2, \dots, \Delta v_p, K)\} \\
 \underline{v} & \quad C_1 \quad C_2 \quad C_2 \quad \dots \quad C_p \quad (\alpha) \quad (\beta) \quad (H) \\
 &= \sum_{\alpha=1} \sum_{\beta=1} \dots \sum_{H=1} L(\underline{x}, \underline{u}, \underline{v}_0, \Delta v_1, \Delta v_2, \dots, \Delta v_p, K) \cdot \\
 & \quad p(\Delta v_1) \Big|_{\alpha} \cdot p(\Delta v_2) \Big|_{\beta} \dots p(\Delta v_p) \Big|_H \quad (17)
 \end{aligned}$$

## 5. INKLUDERING AV MODELL FOR NEDSLAGSFELTET

Eventuell korrelasjon i  $\underline{v}$  er en konsekvens av dynamikk i modellen for nedslagsfeltet.

En diskret snømagasinmodell kan prinsipielt være av formen

$$x_1^1(k+1) = \phi_{11}(k)x_1^1(k) + f_1(k) + \eta_1(k) \quad (18)$$

der  $\phi_{11} = 1$  så lenge det snør uten smelting,  $f_1(k)$  er middelvei av nedbør i form av snø og  $\eta_1(k)$  er en stokastisk tidsfunksjon (hvit støy). Når smelting inntreir, avtar  $\phi_{11}$  gradvis, eller  $\phi_{11}$  kan være tilnærmet konstant, og mindre enn én.

En grunnvannsmodell kan ha formen

$$x_i^1(k+1) = f_i(\underline{\alpha}(k), \underline{x}^1(k), \underline{\eta}(k)) \quad (19)$$

$i=2, 3, \dots, p$

der tilsiget er en funksjon av grunnvannsmodellens tilstander og tilsig fra snømagasin som smelter,

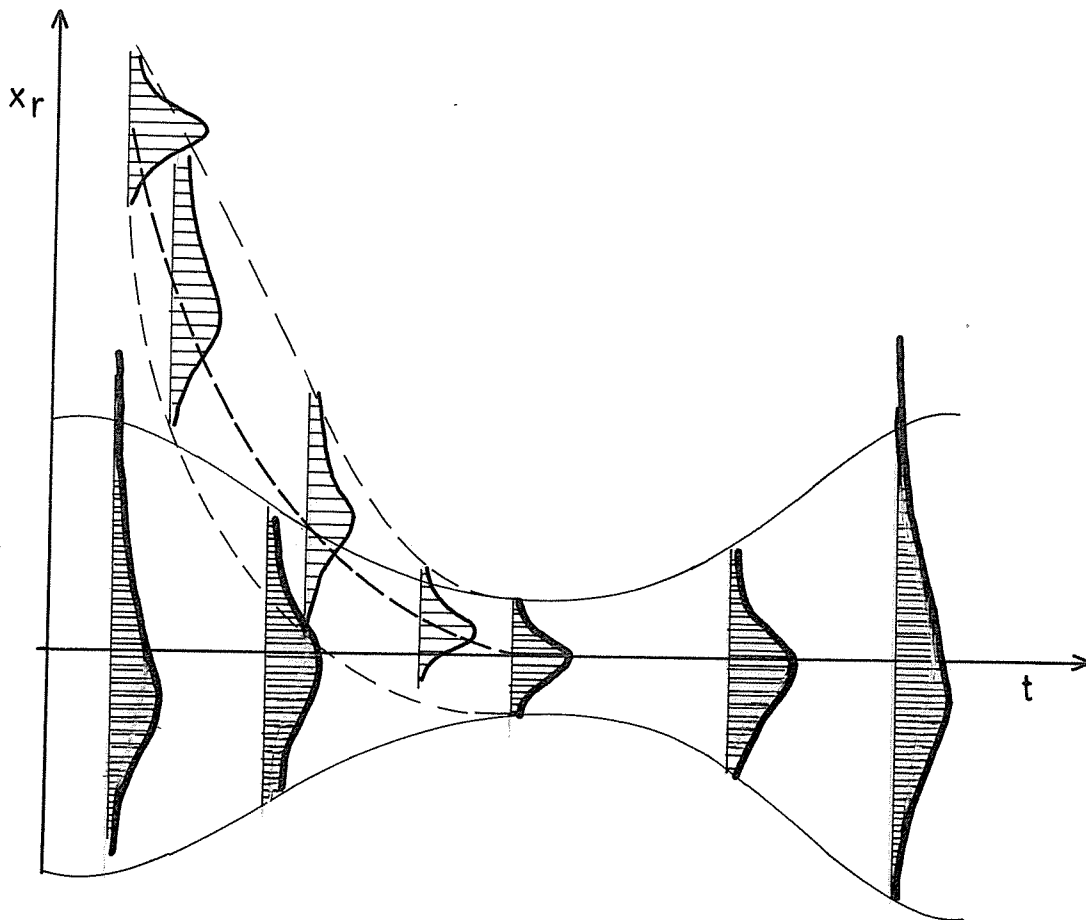
$$\underline{v}(k) = \underline{h}(\underline{\beta}(k), \underline{x}^1(k)) + \underline{f}(k) \quad (20)$$

$\underline{f}(k)$  er middelvei av tilsig. Vi kaller nå tilstandene i modellen for kraftanlegget for  $\underline{x}^2$ ,  $\underline{\alpha}$  og  $\underline{\beta}$  er langsomt varierende parametervektorer. Den samlede tilstandsvektor blir altså

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} \underline{x}^1 \\ \underline{x}^2 \end{pmatrix} \quad (21)$$

Funksjonallikningen (14) kan nå anvendes som før, ved å erstatte  $\underline{v}$  i (14) med  $\underline{\eta}$ , som forutsetningsvis ikke var korrelert langs tidsaksen.

La oss nå se på konsekvensene av denne modell for optimaliseringen. Først legger en merke til at  $\underline{u}$  ikke påvirker  $\underline{x}^1$  (omegnen er ikke "styrbar"). Dette betyr at om begynnelsestilstanden  $\underline{x}^1(0)$  settes, med en antatt usikkerhetsbånd angitt ved kovariansmatrisen  $X^1(0)$ , vil denne modell løpe fritt. I figur 7 er skissert (overdrevet) innsvingningen i én komponent på grunn av gitt initialtilstand, mens de antydene sannsynlighetstettheter symboliserer utviklingen av spredningen mot den spredning som gis av den stokastiske påvirkning alene. Denne påvirkning har typisk en tidsvariabel spredning.



Figur 7

Utviklingen av spredningen kan - om det ønskes - løses direkte i form av en differenselikning for kovariansmatrisen  $X^1(k)$ , når den hydrologiske modell er lineær.

Det er meget viktig å erkjenne resultatet fra optimaliserings-teorien, at de optimale pådrag er en funksjon av alle tilstander i systemet (grunnvannsmagasiner, snømagasiner, vannkraftstasjonsmagasiner etc.). I stokastiske systemer er ikke tilstanden deterministisk glidende middelvei (løsning av diff. likninger) pluss et tidsvarierende usikkerhetsbånd som blant annet er gitt av fordelingsfunksjonene av de stokastiske signalkomponenter. Problemet er derfor ikke å prediktere ett tilsig, men tilsiget med dens tilhørende spredning.

Det er også meget viktig å erkjenne at i denne "naturgitte" usikkerhet ligger nøkkelen til en vurdering av nødvendig regne-nøyaktighet: Resultatene av fysisk gitt usikkerhet og numerisk nøyaktighet bør være avpasset til hverandre.



Dette impliserer bl.a. en spredning i de optimale pådrag ( $\underline{u}=\underline{g}(\underline{x})$ ), som kan beregnes og vil øke med økende tid.

Poenget her er bl.a., om man stiller seg spørsmålet: Beregn den strategi fra nå av 1 måned fremover i tid, som er del av den strategi som minimaliserer forventet sum kostnad over 1 år fremover i tiden. Men beregn ikke nøyaktigere enn at á priori estimat av spredningen av forventet sum kost etter 1 måned er N(f.eks. 5) ganger den forskjell i forventet kost som gis av den numerisk eksakte løsning, og den mer tilnærmede løsning.

Det er klart at det er spørsmål av denne eller liknende type en bør ha for øye, i et stokastisk problem, og ikke hvilken regnenøyaktighet en må ha for ikke å se noen endring i f.eks. den optimale strategi enn si en endring i en grensekostkurve.

## 6. REGNETEKNISKE FINESSER I D.P.

### 6.1. Gruppe A, tilbakekoplede løsninger

a. I mange tilfelle (bl.a. er glatte kostfunksjoner en betingelse), er det mulig å oppnå en god tilnærmelse til  $I(\underline{x},k+1)$  (som må lagres for å finne  $\underline{u}_{opt}$ ) over alle  $\underline{x} \in X$  ved å uttrykke  $I$  som et lavere ordens polynom i  $\underline{x}$ . Dette gir en vesentlig sparing av lagerplass.

Eks.: Med 4. ordens prosess, og 10 kvantiseringsnivå på hver tilstandsvariabel, kreves  $2 \cdot 10^4 = 20\ 000$  hurtiglagerplasser ved konvensjonell metode. Med f.eks. Legendre-polynomer, orden 5, trenger en bare  $(5+1)^4 = 1296$  hurtiglagerplasser. Hemmeligheten er at en lagrer kun koeffisientene i polynomet, og ingen funksjonsverdier. Er imidlertid ordenen for høy på prosessen, kan det være vanskelig å finne en god tilpasning (multidimensjonal flate).

b. Søkeprosedyrer for å finne den  $\underline{u}(k)$  som minimaliserer (9) eller (14) er som regel atskillig mer effektivt enn kvantisering av pådrag, og direkte sammenlikning, som er den mest primitive form for søkning som finnes. Flere metoder kan anvendes (Fibonacci, Simplex metoder (L.P.), visse gradientmetoder som konjugerte gradienters metode, Fletcher-Powells algoritme, etc.).

c. Den såkalte tilstand-inkrementmetoden [2] er spesielt beregnet for kontinuerlige systemer som er transformert til diskret form, og kan derfor sies å passe godt for optimaliseringsberegninger ved drift av vasskraftverk. For et kontinuerlig system er

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{f}(\underline{x}, \underline{u}, t) \quad (23)$$

slik at

$$\underline{x}(t+\delta t) \cong \underline{x}(t) + \underline{f}(\underline{x}, \underline{u}, t) \delta t \quad (24)$$

For kriteriet

$$J = \int_t^{t+T} L(\underline{x}, \underline{u}, \mu) d\mu \quad (25)$$

der  $[t, t+T]$  er optimaliseringsintervallet, er likeledes

$$\int_{\mu}^{\mu+\delta t} L(\underline{x}(\sigma), \underline{u}(\sigma), \sigma) d\sigma \cong L(\underline{x}(\mu), \underline{u}(\mu), \mu) \delta t \quad (26)$$

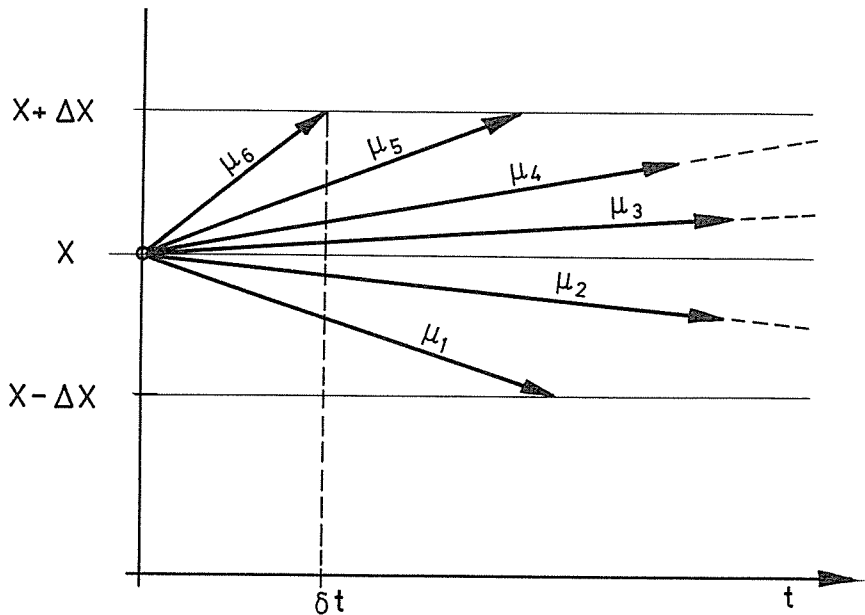
det vil si, at likning blir

$$I(\underline{x}, t) = \text{Min}_{\underline{u}} \{L(\underline{x}, \underline{u}, t) \delta t + I(\underline{x} + \underline{f}(\underline{x}, \underline{u}, t) \delta t, t + \delta t)\} \quad (27)$$

$\underline{x}$  og  $\underline{u}$  kvantiseres som før.  $t$  kvantiseres med inkrement  $\Delta t$ . Kost og  $\underline{u}_{\text{opt}}$  beregnes bare i knutepunktene. Imidlertid,  $\delta t$ , tiden som en gitt, stykkevis konstant  $\underline{u}$  beregnes og anvendes, bestemmes av

$$\delta t = \text{Min}_{i=1, 2, \dots, n} \left\{ \left| \frac{\Delta x_i}{f_i(\underline{x}, \underline{u}, t)} \right| \right\} \quad (28)$$

der  $\Delta x_i$  er kvantiseringsinkrement for tilstandsvariabel nr.  $i$ . Likning (28) sikrer at forandringen i enhver tilstandsvariabel er  $\leq \Delta x_i$ .



Figur 8

F.eks. har en et eksempel på at ved denne metode har kravet til hurtiglagerplass blitt redusert fra  $10^6$  ved konvensjonell metode til  $10^2$ , med bibehold av samme nøyaktighet totalt sett. Betydelig redusert regnetid oppnås også, selv om denne ikke har relativt så stor forbedring.

Den fundamentale egenskap ved tilstand-inkrementmetoden er at den gir en metode til å bestemme  $\delta t$ , det tidsintervallet som et konstant pådrag anvendes. Altså, istedet for å beregne nytt pådrag etter en fiksert  $\Delta t$ , beregnes ikke dette før tilstanden har forandret seg med et spesifisert inkrement: Regnemetoden er adaptiv. Den andre, og vel den viktigste egenskap, er at

$$I(\underline{x} + \underline{f}(\underline{x}, \underline{u}, t) \delta t, t + \delta t)$$

i konvensjonell D.P. må bestemmes ved å interpolere verdien for min minimum kost i mange aktuelle punkter, da en ikke kjenner hvor trajektoren  $\underline{x}$  ender opp etter tidsskrittet  $\Delta t$ . I tilstands-inkrementmetoden behøver en bare lagre de kvantiserte tilstander i knutepunkter nær tilstanden ved forrige skritt. Dette gir en stor besparelse i lagerplasser, og av og til også noen besparelse i regnetid, fordi tidsskrittet for beregning av nytt pådrag avpasses etter hvor raskt tilstanden  $\underline{x}$  endrer seg.

Problemer med én tilstandsvariabel (f.eks. én-magasinproblemer) blir meget enkle m.h.t. (28); da er simpelthen

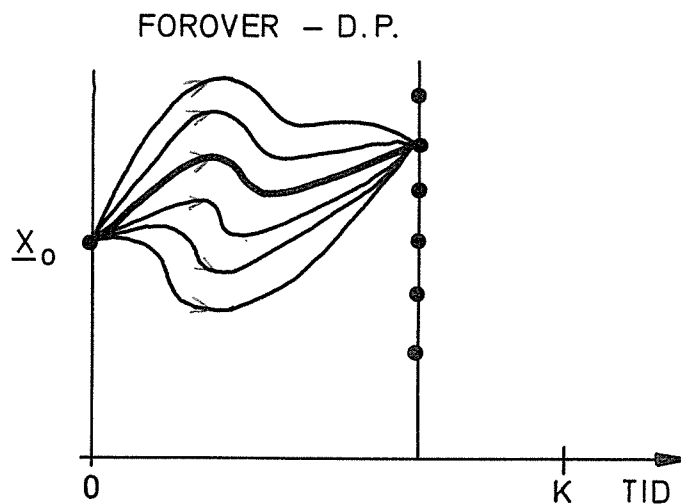
$$\delta t^i = \frac{\Delta x_1^i}{|f(x_1^i, u, t_i)|} \quad (29)$$

For å utnytte metoden fullt ut, kreves en del tilleggsfinesser, som ikke skal kommenteres nærmere her (bruk av såkalte "datablokker" [2]).

## 5.2. Gruppe B. Gitt initialtilstand

### a. Forover - D.P.

Beregningen starter forfra, og er gunstig å anvende når initialtilstanden er gitt, men ønsker å vurdere nærmere konsekvensen av forskjellige valg av slutt-tilstand. Ikke-optimale trajektorer skilles suksessivt ut ved å bare ta vare på de pådragssekvenser som gir minimum kost for alle de trajektorer som ender opp i samme punkt. Se figur 9.

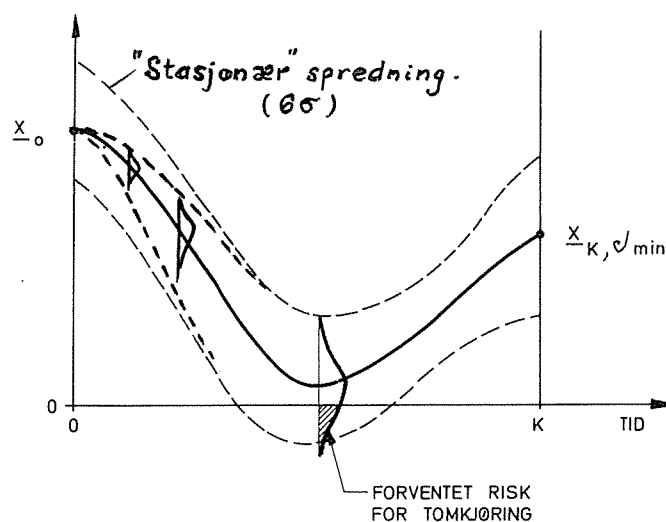


Figur 9

Uansett om optimaliseringsintervallet er til ende eller ikke, kan ikke de trajektorer som gir kost større enn  $I_{\min}$  i  $[0, k]$  være optimale i  $[0, K]$ , for samme tilstand  $\underline{x}(k)$ .

Denne metode synes spesielt gunstig å anvende, når en ønsker å vurdere innvirkningen av mer eller mindre "dristige" valg av slutt-tilstand. En kan f.eks. tenke seg å velge den slutt-tilstand som gir en definert forventet risiko for flomtap eventuelt tamkjøring.

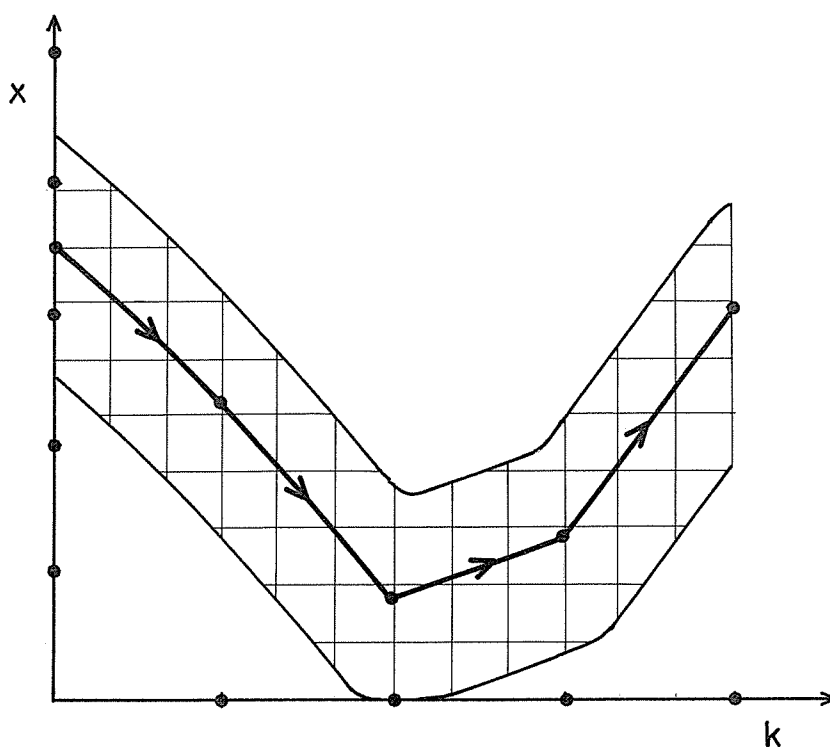
Hadde problemet vært lineært med kvadratisk kriterium og Gaussisk fordeling av tilsiget, ville denne risk kunne finnes meget enkelt ved å løse kovarianslikningen for magasinivåene på basis av kovariansene for tilsigene. Grunnen er at  $\underline{u}(k)=G(k)\underline{x}(k)$  kan settes inn i magasinmodellene (prosesslikningene). En må imidlertid regne med at innvirkningen av ulineariteten ved topp- og bunn-nivå endrer strategien fra det lineære og strategien kan da bare finnes fra en tabell som angir sammenhengen  $\underline{x} \rightarrow \underline{u}$ , funnet ved D.P. Risikoen kan i slike tilfelle finnes ved stokastisk simulering (Repetitiv hybridsimulering med støygenerator, eller Monte-Carlo simulering på datamaskin). Se figur 10, som viser utviklingen i spredningen.



Figur 10

Av den stokastisk optimale løsning ved forover D.P. får en også "gratis" frem forventet økning (minskning) i samlet kost ved å heve (senke)  $x_K$ . En har herved et middel til å vurdere forventet økning i kost på grunn av mindre tomkjøringsrisiko.

- b. En vanlig metode er å foreta en grovregning (grov diskretisering) for å finne en "nominell" trajektor. Ut i fra denne kan f.eks. iterative metoder benyttes videre, eller en finere diskretisering omkring den nominelle trajektor.



Figur 11

- c. En metode i D.P. omsetter et  $n$ -dimensjonalt problem til  $n$  1-dimensjonale problemer. Behov for hurtiglagerplass omgjøres dermed til tidsforbruk.
- d. En rekke andre teknikker finnes, men her henvises bare til spesiallitteraturen.

#### 7. AVSLUTTENDE BEMERKNINGER TIL ANVENDELSE AV D.P.

- a. Det som er klart, er at en ved kombinasjon av flere teknikker kan mestre både dimensjons- og tidsproblemet på en mye bedre måte enn den konvensjonelle metoden i D.P. Besparelse i antall lagerplasser er meget viktig, siden det er antall hurtiglagerplasser som setter et absolutt tak på beregning av høyere ordens optimaliseringsproblemer.
- b. M.h.t. inkludering av hydrologiske modeller i optimaliseringen, er det klart at en bør unngå å "skyte spurv med kanoner". Hovedhensikten må være å etablere den enklest mulige modell som tar vare på det vesentlige av dynamikken. En bør ikke

ha større detaljrikdom i en slik modell enn det en usikker fremtid tilsier. Optimaliseringen er tross alt en minimalisering av en forventningsverdi.

- c. Et punkt som må bestemmes etter skjønnsmessig vurdering i enhver optimaliseringsoppgave, er valg av optimaliseringsintervall. Kort optimaliseringsintervall gir stor vekt på øyeblikkssituasjonen. Når optimaliseringsintervallet blir større, betyr dette at en legger større og større vekt på den fjerne fremtiden relativt den "nære fremtid", definert ved f.eks 0 - 4 måneder. I en deterministisk optimalisering vil en legge større og større vekt på stasjonærnivået når optimaliseringsintervallet økes. Effekten av initialbetingelser vil da trolig ikke gi vesentlig utslag i den optimale strategi. Tilsvarende gjelder i stokastisk optimalisering, økende optimaliseringsintervall gir økende vekt på de stokastisk stasjonære forhold. Derfor er det intet særlig poeng i å trekke inn hydrologiske modeller (autokorrelasjon i tilsiget) når optimaliseringsintervallet blir langt, si fra 1 år og oppover. (Trolig, men dette bør undersøkes nærmere).

Verdien av hydrologisk modellbygging må derfor også sees i sammenheng med optimaliseringsintervallet. Et løpende optimaliseringsintervall på f.eks. 6 måneder vil etter forfatterens (subjektive) oppfatning gi en passende avveining mellom den aktuelle hydrologiske situasjon, og hensynet til fremtiden.

## 8. SAMMENHENG MELLOM VANNVERDIMETODEN OG PONTRYAGINS MAKSIMUMSPRINSIPP/DYNAMISK PROGRAMMERING (P.M./D.P)

### 8.1. Generelt

Pontryagins maksimumsprinsipp er en videreutvikling av klassisk variasjonsregning (se f.eks. [1]), og angir de nødvendige betingelser (likninger) som må løses for det gitte optimaliseringsproblem. Dynamisk Programmering (D.P.) bygger på det såkalte optimalitetsprinsippet [7], som resulterer i en funksjonallikning som må løses i det tids-diskrete tilfelle. I det kontinuerlige tilfellet resulterer prinsippet i en partiell differensiallikning. Det er en nær matematisk sammenheng mellom P.M. og D.P. [7].

Hverken P.M. eller D.P. som sådan anviser noen resept på den numeriske løsning av beregningsproblemet. Det er, som det til dels vil fremgå av tidligere avsnitt, gjort et utall av studier for å finne effektive algoritmer. Rent prinsippielt går disse oftest ut på å konstruere numeriske strategier for å søke seg frem til den optimale reguleringsstrategi (pådrag) iterativt. Disse problemstillinger skal ikke belyses her, men bare gå inn på den prinsipielle sammenheng mellom P.M./D.P. og vannverdimetoden. For først å få et begrep om hva det hele dreier seg om, betraktes først det deterministiske tilfellet; dessuten ett magasin.

### 8.2. Deterministisk tilfelle. Maksimumsprinsippet

Den gitte prosessen er for enkelhets skyld representert ved

$$\dot{x}(t) = u(t) + v(t) \quad (1)$$

med  $x_{\min} \leq x \leq x_{\max}, 0 \leq u \leq u_{\max}$

der  $x(t)$  er magasinivolum, regnet i kWh,  $u(t)$  pådrag i kW og  $v(t)$  tilsig i samme enhet.  $t$  er løpende tid.  $v(\tau)$  for  $t \leq \tau \leq T$  antas kjent (ut i fra best mulige prediksjoner). Herav betegnelsen "deterministisk" tilfelle. Den kraft som skal leveres ved tid  $t$ , tenkes representert ved



$$P(t) = P_R(t) + S(t) \quad (2)$$

der  $P_R(t)$  er fastkraft, og  $S(t)$  er kjøp av suppleringskraft (en kan her også inkludere omkostningene ved svikt i levering av fastkraft), eller salg av tilfeldig kraft. Ved salg er

$$P - P_R = S < 0$$

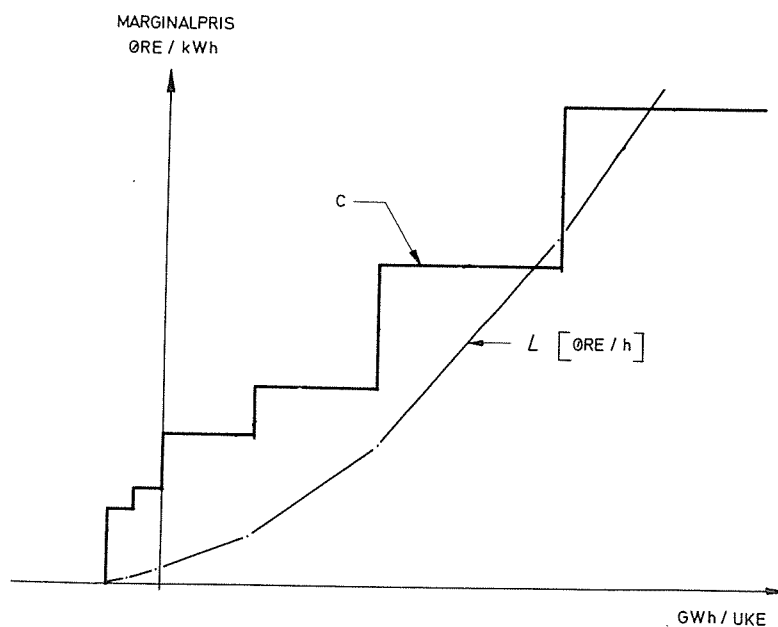
og ved kjøp er

$$P - P_R = S > 0$$

Optimalkriteriet for driften defineres til oppgaven å minimalisere tidsintegralet av en løpende driftsavhengig "kostnad"  $L$  [Kr./time], som definisjonsmessig av elverkene er satt som en funksjon av  $S$  (eventuelt av  $P/P_R$ ),

$$J = \int_{t}^{t+T} L(S(\tau)) d\tau \rightarrow \text{Min} \quad (3)$$

Kriteriet er altså å minimalisere total driftsavhengig utgift i intervallet  $[t, t+T]$ . Nå oppgis vanligvis den såkalte "preferansefunksjon" eller marginalprisfunksjon  $PF(S)$  [øre/kWh] som funksjon av  $S$  i f.eks. MW]. Se figur 12.



Figur 12

Denne funksjonen er angitt positiv både for  $S > 0$  og  $S < 0$ .  
Altså kan den løpende kostnad uttrykkes som

$$L = \int_{P=P_R}^P PF(\mu) \text{sign}(P-P_R) d\mu$$

eller, ekvivalent

$$L(S(t)) = \int_0^{S(t)} PF(\lambda) \text{sign}(S(t)) d\lambda \quad (4)$$

Løpende utgift er altså integralet under prisfunksjonen PF inntil det aktuelle kjøp (eller salg)  $S(t)$ . Ved salg ser vi at "utgiften"  $L$  blir negativ. Vi får altså som optimal-kriterium

$$J = \int_t^{t+T} \left[ \int_0^{S(\tau)} PF(\lambda) \text{sign}(S(\tau)) d\lambda \right] d\tau \rightarrow \text{Min.} \quad (5)$$

P.M. skal ikke gjennomgås her (se [1]), men det skal kort nevnes nødvendige betingelser for optimalitet. Sammen med prosesslikningen (1), finnes det optimale pådrag  $u^*(t)$  ved å maksimalisere funksjonen  $H$ ,

$$H = -L(S(t)) + p(t)(u(t) + v(t)) \quad (6)$$

der  $p(t)$  finnes av

$$\dot{p}(t) = - \frac{\partial H}{\partial x} \quad *) \quad (7a)$$

[\*] En ser da egentlig bort fra at  $x(t)$  kan støte på  $x_{\min}$  eller  $x_{\max}$ .  $p(t)$  er da ikke nødvendigvis konstant i  $[t, t+\tau]$ , men kan endre verdi sprangvis ved disse diskontinuitets-punktene for  $\dot{x}$ , [7]. Her er imidlertid ikke  $H$  eksplisitt avhengig av  $x$ , slik at (7a) gir

$$\dot{p}(t) = 0 \quad (7b)$$

det vil si,  $p(t) = \text{konstant}$  [eller stykkevis konstant, se merknaden \*)].

Grensebetingelsene for (1) og (6) spesifiseres ikke nærmere her. For å minimalisere  $H$  m.h.p.  $u(t)$ , behøver vi å uttrykke  $L$  som funksjon av  $u(t)$ . Vi har 2 tilfelle, kjøp og salg. Ved kjøp er

$$u = P_R \quad (P - P_R = S > 0)$$

Ved salg er

$$u = P_R + S = P \quad (P - P_R = S < 0)$$

Altså, for

$$S > 0: \quad L(S) = L(P-u) \quad (8)$$

$$S < 0: \quad L(S) = L(u-P_R) \quad (9)$$

Videre er for

$$S < 0: \quad \delta S = \delta u$$

$$S > 0: \quad \delta S = -\delta u$$

slik at

$$S < 0: \quad \frac{\delta H}{\delta u} = \frac{\delta L(u-P_R)}{\delta u} + p = \frac{\delta L(S)}{\delta S} + p = 0 \quad (10)$$

$$S > 0: \quad \frac{\delta H}{\delta u} = \frac{\delta L(P-u)}{\delta u} + p = \frac{\delta L(S)}{-\delta S} + p = 0 \quad (11)$$

Begge betingelsene gir

$$\frac{\delta L(S)}{\delta S} \text{ sign}(S) = p \quad (12)$$

Men fra (4) has

$$\frac{\delta L(S)}{\delta S} = PF(S) \text{ sign}(S) \quad (13)$$

slik at (12) blir

$$PF(S(t)) = p(t) \quad (14)$$

$p(t)$  kan vi kalle "optimal marginalpris" for den aktuelle situasjon, idet løsningen av 1.(1), (7) og (14) gir den optimale trajektor  $x(t)$ , sammen med den optimale  $u(t)$  og tilhørende  $p(t)$ . Av 1.(6) sees at  $p$  har dimensjon øre/kWh, og er identisk med Lagrange-multiplikatoren i klassisk variasjonsregning. - Løsningen blir i praksis ikke interessant hvis ikke også grensebetingelser ved  $\tau = t + T$  også trekkes inn. Det sees av (7b) at den optimale marginalpris  $p$  i det deterministiske tilfelle er konstant langs en optimal trajektor for  $x_{\min} < x < x_{\max}$  (stykkevis konstant med diskontinuiteter når  $x(t)$  treffer  $x_{\min}$  og  $x_{\max}$ , eller forlater disse). Dette kan da også dokumenteres fra resultatet av numeriske løsninger av optimaliseringsproblemet [8]. Herav trekkes den viktige konklusjon, at langs en optimal trajektor  $x(t)$  skal en kjøpe eller selge en konstant mengde kraft (når  $PF = PF(S)$ ), inntil en støter på, eller forlater  $x_{\min}, x_{\max}$ . Denne konklusjonen gjelder strengt tatt bare sikkert når  $PF(S)$  er kontinuerlig. (Entydighet av løsningen med egenskapen overfor bør egentlig undersøkes nærmere når  $PF$  er av trappetrinnsform).

Ved langtidsoptimalisering er dette resultat mindre interessant av flere årsaker, av hvilke her skal nevnes:

- Fastkraftbehovet  $P_R(t)$  er ikke nøyaktig kjent.
- Tilsiget  $v(t)$  er en stokastisk tilstand, som kan betraktes å genereres fra et høyere ordens dynamisk system med ren stokastisk input ("hvit" støy). Middelveidien  $\bar{v}(t)$  av  $v(t)$  kan imidlertid betraktes som å være ikke-stokastisk, og kjent.

Dette leder til en betraktning av det stokastiske optimaliseringsproblem, der en har stokastiske komponenter både i  $P_R(t)$  og  $v(t)$ . Da behandlingen av dette problem er veletablert i forbindelse med D.P., går vi over til denne teknikk, dog her bare med usikkerhet i tilsiget  $v$ .

### 8.3. Dynamisk Programmering (kontinuerlig form)

#### 8.3.1. Deterministisk tilfelle

For lettere å knytte en viss forbindelse til P.M., betraktes først det deterministiske tilfelle. Selv om den kontinuerlige form av D.P. er uhensiktsmessig for beregningsformål, er den i denne sammenheng nyttig for å påvise strukturen av den optimale løsning. For optimaliseringsintervallet  $[t, t+T]$  her vi kriteriet

$$J = \int_t^{t+T} L(u, P, P_R) d\tau \rightarrow \text{Min} \quad (15)$$

og det defineres en størrelse  $s(\tau)$  for  $t \leq \tau \leq t+T$ ,

$$s(\tau) = \int_{\tau}^{t+T} L(u(\lambda), P, P_R) d\lambda \quad (16)$$

$t \leq \tau \leq t+T$

Prosessen er gitt av 1.(1). I [7] er det v.hj.a. D.P. vist at løsningen er gitt av den  $u(\tau)$  og den  $s(\tau)$  som tilfredsstillter

$$\text{Min}_{u(\tau)} \{L + s_x(u+v) + s_\tau\} = 0 \quad (17)$$

med visse grensebetingelser på  $s$ , som ikke skal angis nærmere her. Herav finnes, at en nødvendig betingelse ved optimale forhold, er at

$$\frac{\delta L}{\delta u} + s_x = 0 \quad (18)$$

$$(s_x = \frac{\Delta}{\partial x}, s_\tau = \frac{\Delta}{\partial \tau})$$

Vi legger merke til, at den partiellderiverte

$$-s_x(\tau) = -\frac{\partial}{\partial x} \int_{\tau}^{t+T} L(u(\lambda), P, P_R) d\lambda \quad (19)$$

har betydning av optimal marginalpris. (Dette er ikke lik null,

da ved optimale forhold, er dette integral en funksjon av tilstanden  $x$  ved tid  $\tau$ .) Fra (10) - (11) og (19) has nå

$$p(\tau) = -s_x(\tau) = -\frac{\partial}{\partial x} \int_{\tau}^{t+T} L(u(\lambda), P, P_R) d\lambda \quad (20)$$

Dette viser som før at:  $\dot{p} = -s_{x\tau} = 0$ .

### 8.3.2. Stokastisk tilfelle

Dersom  $v(t)$  har kjent middelvei  $\bar{v}(t)$  og  $v(t) - \bar{v}(t)$  er ren stokastisk ("hvit"), slik at

$$E\{(v(t) - \bar{v}(t))(v(\tau) - \bar{v}(\tau))\} = \sigma^2(t)\delta(t-\tau)$$

der  $\delta(\cdot)$  er den såkalte "delta-funksjon", er i [7] løsningen vist å være gitt av

$$\text{Min}_{u(\tau)} \{L + s_x(u + \bar{v}) + s_\tau + \frac{1}{2}s_{xx}\sigma^2\} = 0 \quad (21)$$

I dette tilfelle er  $s$  definert ved

$$s(\tau) = E\left\{ \int_{\tau}^{t+T} L(u(\lambda), P, P_R) d\lambda \right\} \quad (22)$$

altså forventningen av integralet i (16). Problemet er jo nå stokastisk, og problemet har bare mening når kriteriet har formen

$$J = E\left\{ \int_t^{t+T} L(u, P, P_R) d\tau \right\} \rightarrow \text{Min}$$

Av (21) sees at en av betingelsene for optimalitet er at ved ethvert tidspunkt  $\tau$  skal

$$\frac{\delta L}{\delta u} + s_x = 0 \quad (23)$$

der  $s(\tau)$  er gitt av (22), slik at

$$s_x = \frac{\partial}{\partial x} E\left\{ \int_{\tau}^{t+T} L(u(\lambda), P, P_R) d\lambda \right\} \quad (24)$$

og en ser derfor at  $s_x$  kan tolkes som forventet optimal marginalpris. Akkurat som i det deterministiske tilfelle ser vi at

$$s_{x\tau} = 0$$

langs den forventede optimale trajektor. Også i det stokastiske tilfelle er den forventede optimale marginalpris konstant langs en forventet optimal trajektor. Dette forutsetter imidlertid analogt det deterministiske tilfelle, at den forventede trajektoren  $x(t)$  befinner seg så langt fra begrensningene på  $x$  at fordelingen av trajektorene rundt den forventede trajektor ikke berører begrensningene. Eller: At sannsynligheten for flom eller tomkjøring er minimal. Dette er allikevel et nyttig resultat, som kan komme til anvendelse i mange tilfelle.

Det er også verdt å legge merke til at løsningen blir bare så enkel dersom  $v(t) - \bar{v}(t)$  er rent stokastisk ("hvit"). Dersom f.eks.  $v(t)$  genereres gjennom

$$\dot{v}(t) = av(t) + n(t) \quad (25)$$

blir istedenfor (21), betingelsen for optimalitet at [7],

$$\text{Min}_u \{ L + s_x(u+v) + s_v(av+\bar{n}) + s_\tau + \frac{1}{2}s_{vv}\sigma_n^2 \} = 0 \quad (26)$$

hvilket vil medføre at  $s_x$ , og dermed den optimale strategi, generelt får en annen verdi. Innføringen av (25) betyr - rent kvalitativt sett - noe av det samme som å ha ett magasin til i systemet; en får en "optimal marginalpris"  $s_v$  også for grunnvannsreservoaret. Tilsvarende forhold gir også snømagasiner og høyere ordens modeller istedenfor l(25).

#### 8.4. Den optimale strategi

##### 8.4.1. Oppdatering av strategien

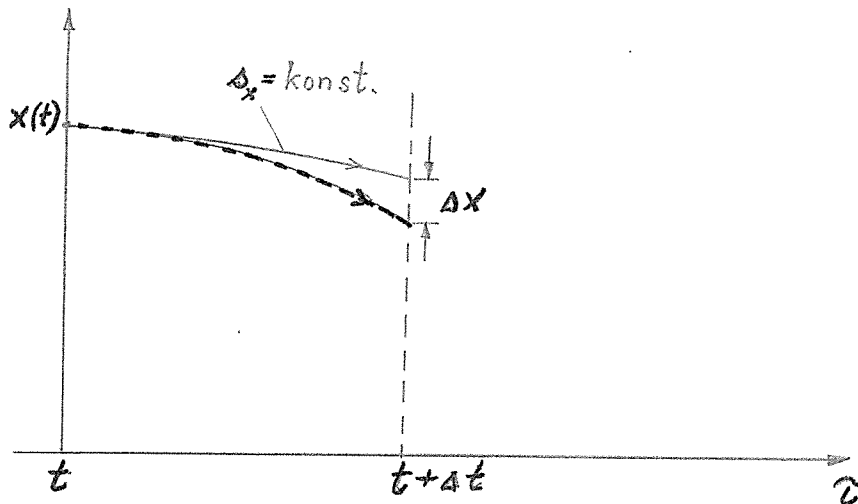
Kurven for  $s_x = \text{konstant}$  gir oss, (under de tidligere angitte

forutsetninger) at fra tid  $\tau > t$  og fremover, skal det selges (eller kjøpes) kraft av en mengde gitt av betingelsen

$$s_x = PF(S(\tau)) \quad (27)$$

Om  $S(\tau)$  skal være positiv eller negativ, gis av minimaliseringen m.h.p. u i l.(21), som er grei å sjekke.

Ut i fra det forventede forløp skulle denne strategi gi oss en bane langs  $s_x = \text{konstant}$ , gjennom den aktuelle begynnelsesbetingelse. Se figur 13.



Figur 13

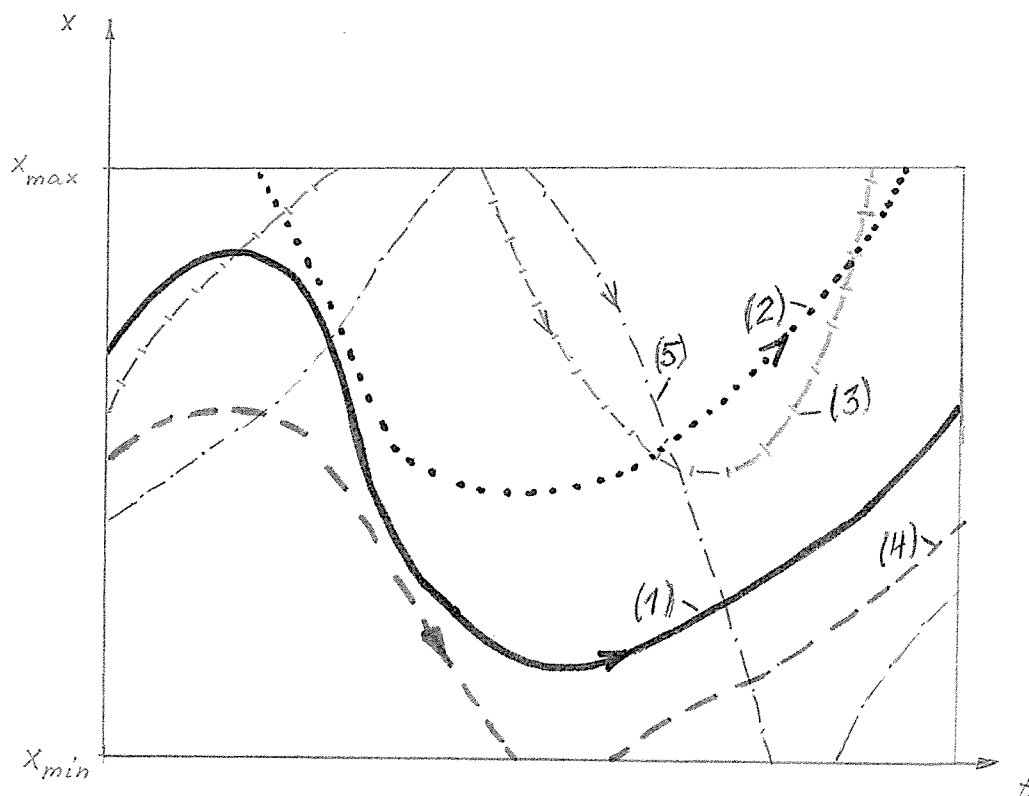
Men siden fremtiden er usikker, vil vi ved tiden  $t + \Delta t$  muligens ikke befinne oss på den optimale trajektor, men i en viss avstand  $\Delta x$  fra denne. Først når dette avvik er vesentlig ( $\Delta x > \epsilon$ ), beregnes en ny optimal trajektor i intervallet  $[t + \Delta t, t + \Delta t + T]$ . Strategien er nå oppdatert. Et viktig poeng er altså at en behøver ikke gjøre noen ny beregning, før en i praksis ser at det er nødvendig.

#### 8.4.2. Parametrisering av den optimale pådragsfunksjon

På grunn av at pådraget er stykkevis konstant ut fra egenskapen  $p = \text{konstant}$  langs en optimal trajektor, kan pådragsfunksjonen i slike tilfelle parametriseres. Dette holder i det deterministiske



tilfelle, og kan således anvendes ved korttidsoptimalisering. Anta at praksis viser at for optimaliseringsintervall på N uker er det bare nødvendig med opp til 4 parametre for å beskrive pådraget i sine tilhørende tidsintervall. Disse 4 tilfelle kan illustreres som på figur 14.



Figur 14

For (1) kan u beskrives ved én parameter, for (2) og (4) ved 3 parametre, for (3) med 4 parametre og for (5) med 5 parametre.

see ar

Herved kan optimaliseringen foregå ved en eller annen metode kjent fra parameteroptimaliseringen [1]. Dette foregår prinsipielt ved at det "klatres" på funksjonen  $J$  i bestemte retninger i parameterrommet. Et utall metoder finnes her, og noen har vist seg å virke med flere hundre parametre. Dette ville i så fall bety mulighet for optimalisering av et system med svært mange magasiner.

### 8.5. Vannverdiberegning. Kommentarer

Ved vannverdiberegninger kartlegges et sett av kurver for hvilke "vannverdien"  $\kappa = \text{konstant}$  [4]. Forskjellige typer grensebetingelser kan tenkes. En finner altså ikke bare løsningen ut fra den aktuelle situasjon, men en finner  $\kappa = \kappa(x, \tau)$  for alle  $x$  og  $0 \leq \tau \leq T$ , der  $T$  er optimaliseringsintervallet, slik at pålagte grensebetingelser oppfylles. Vanligvis utføres beregningene bakfra, idet man ved  $\tau = T$  antar en  $\kappa = \kappa(x, T)$ . Så tas et tidsskritt tilbake, f.eks. én uke, og velger en tilstand  $x''(T-1)$ . Man velger så ut et tilsig for den aktuelle periode (fra et eller annet år),  $v_{i, T-1}$ . Nå finnes akkurat det pådrag  $u_{i, T-1}$  som tilsvarende marginalprisen (ut fra marginalpriskurven) i punktet  $x'(T)$ , der  $x'(T)$  er den tilstand som er resultatet av dette pådrag. Dette vil si at en oppfyller de 2 betingelsene

$$s_x(x', T) = PF(u_{i, T-1}) \quad (28)$$

$$x'(\tau) = x''(T-1) + \int_{T-1}^T (u_{i, T-1} + v_{i, T-1}) dt \quad (29)$$

eller, om en regner stykkevis konstant  $u$ , og  $v_i$  er registrert på ukebasis, fås rett og slett av (29),

$$x'(\tau) = x''(T-1) + 1 \cdot (v_{i, T-1} + u_{i, T-1}) \quad (30)$$

$PF(u_{i, T-1})$  er nå en vannverdi for et "deterministisk system". Analogt l. (24) skal en imidlertid for det stokastiske tilfelle beregne forventningsverdien av vannverdiene over alle  $v_i$ ; det vil si, at den forventede vannverdi i punktet  $x''(T-1)$  er

$$E\{\kappa(x'', T-1)\} = E_{v_i} \{PF(u_{i, T-1}) \mid v_{i, T-1}, i = 1, 2, \dots, N\} \quad (31)$$

Betraktes tilsigene som like sannsynlige, beregnes forventningsverdien ovenfor ved en ren midling av de enkelte verdier  $PF$ . Optimal drift bestemmes nå ved sammenlikning av profilet  $\kappa(x, t)$  for forventet vannverdi ved ethvert tidspunkt  $t$ , med marginalpriskurven. Forventet vannverdi = marginalpris dikterer  $S$ , og

dermed det optimale pådrag.

Ut i fra dette, og l.(19), l.(24) ser vi følgelig sammenhengen:  
I det deterministiske tilfelle er  $\kappa(x,t)$  det samme som den adjungerte variable  $p(x,t)$ . (Den "optimale marginalpris").

og

I det stokastiske tilfelle er forventningsverdien av  $\kappa(x,t)$  det samme som den variable  $s_x(x,t)$ . (Den "forventede optimale marginalpris".)

Om beregningene itereres til

$$\kappa(x,0) = \kappa(x,T) \quad (32)$$

(se [4] ), det vil si at en har pålagt en "periodisk" grensebetingelse på vannverdien, har dette visse konsekvenser for de forventede trajektorer.

#### Kommentarer til vannverdimetoden

- a) Siden vi har sett at kurver for konstant vannverdi i prinsippet også er den forventede optimale trajektor ut i fra den gitte initialtilstand, betyr grensebetingelsene (32) at f.eks. såvel et tilfelle av ekstremt stort oppfylt magasin som ekstremt lite oppfylt magasin søkes kopiert ved samme tidspunkt neste år.

Grensebetingelsene er sentrale i ethvert variasjonsproblem. Antakelsen (32) ovenfor kan i høy grad være gjenstand for filosofisk diskusjon.

I diskusjonsinnleggene til [6], hevdet en taler at ... "By considering the value of the reservoir storage in terms of incremental water values, the author has succeeded in removing the end-point boundary on reservoir when dynamic programming methods are applied to discrete interval finite time-to-go problems".

Bemerkningen viser at man her neppe har undersøkt den variasjonsmatematiske bakgrunn for metoden, idet oppfyllelsen av (32) tydeligvis antas å bero på at grensevannverdi benyttes, og videre at en tror å ha unngått å ta stilling til det to-punkts grenseverdi-problemet ved å benytte grensevannverdi.

- b) Beslutningene på basis av vannverdiskjemaet vil selvfølgelig bare være korrekt, bortsett nå fra betraktningene av optimaliseringsintervall, dersom markedets vurdering av prisen er lik den som man faktisk har lagt til grunn for optimaliseringen.
- c) Man kan spørre seg om det ikke er ressursutnyttelsen som er det sentrale, og ikke en optimalisering basert på et fiktivt prissystem, så lenge en holder seg til kjøp og salg av kraft i Norge. Ut i fra dette syn vil det være rimelig å definere et optimalkriterium for et vassdragssystem f.eks. som å minimalisere forventet tap i vannkraftpotensial, med pålagte grensebetingelser. Derved vil det direkte økonomiske aspekt holdes utenfor hvordan en best skal forvalte sine ressurser. (Men det er selvfølgelig klart at også dette kriterium for styring har økonomiske konsekvenser).
- d) En vannverdiberegning utført på basis av en "enmagasinmodell" betyr som kjent ikke at systemmodellen består av ett magasin, men at selve optimaliseringen baseres på ett magasin med visse semianalytiske justeringer m.h.t. totalt volum, tilsig, total maksimaleffekt etc. En kan imidlertid stille spørsmål om hvor meget denne forenkling slår ut i den optimale drift av det samlede system, især dersom det er store innbyrdes forskjeller i verkenes maksimaleffekt og karakteristika i deres tilhørende magasiner ("overårsmagasin" eller ikke, etc.).
- e) En ser også av diskusjonen tidligere i avsnitt 8, at ved utarbeidelsen av vannverdikurver regnes mye mer enn man behøver; dette sløseri med regnemaskintid kan reduseres betraktelig. Bruk av effektive søkemetoder for å finne

optimalt pådrag i samband med D.P., ut i fra vannkraftsystemets aktuelle situasjon, vil være fordelaktig. En slik omlegning vil ha administrasjonsmessige virkninger. Beslutningen tas av "datamaskinen" på basis av de data den mates med, og det er egentlig ikke spillerom for subjektive avgjørelser av elverksbestyreren, så lenge forutsetningene er godtatt. Ved bruk av et vannverdi-skjema har på den annen side elverksbestyreren muligens følelse av å delta i beslutningsprosessen.

LITTERATUR

- [1] J.G. Balchen, M. Fjeld, O.A. Solheim:  
Reguleringsteknikk Bd. III. Multivariable Systemer.  
Tapir 1970.  
(Se her for videre litteraturreferanser).
- [2] R.E. Larson:  
State Increment Dynamic Programming.  
Elsevier 1968.
- [3] R.E. Larson:  
A Survey of Dynamic Programming Computational Procedures.  
IEEE Trans. on Autom. Control, AC-12, No. 6, pp. 767 - 774  
(Desember 1967).
- [4] Preliminær rapport fra komité for økonomisk drift av  
vannkraftverk.  
EFI - TR 1410, 19.1.1968.
- [5] Katalog over regnemaskinprogrammer for UNIVAC-1108  
(DAK-programmer).  
Rapport 71-37-U. Institutt for Reguleringsteknikk.
- [6] J. Lindqvist:  
Operation of a Hydrothermal Electric System:  
A Multistage Decision Process.  
AIEE April 1962, pp. 1 - 7.
- [7] S.E. Dreyfus:  
Dynamic Programming and the Calculus of Variations.  
Academic Press 1965.
- [8] O. Stavnes:  
Optimal vannkraftregulering basert på profittkriterium  
og deterministiske data.  
Diplomarbeid ved Institutt for Reguleringsteknikk,  
høsten 1968.