

**SINTEF IKT**

Postadresse: 7465 Trondheim  
Besøksadresse: Alfred Getz vei 1, NTNU  
7491 Trondheim  
Telefon: 73 59 30 48  
Telefaks: 73 59 29 71

Foretaksregisteret: NO 948 007 029 MVA

**SINTEF RAPPORT**

TITTEL

**Lokal data-assimilering i Simra:  
Korreksjon av vindstyrke og retning ved bruk av flydata**

FORFATTER(E)

Torbjørn Utnes, Karstein Sørli

OPPDRAGSGIVER(E)

Avinor

RAPPORTNR. SINTEF A11931	GRADERING Åpen	OPPDRAGSGIVERS REF. Erling Bergersen	
GRADER. DENNE SIDE Åpen	ISBN 978-82-14-04443-0	PROSJEKTNR. 90A344	ANTALL SIDER OG BILAG 30
ELEKTRONISK ARKIVKODE		PROSJEKTLEDER (NAVN, SIGN.) Torbjørn Utnes <i>T. Utnes</i>	VERIFISERT AV (NAVN, SIGN.) Karstein Sørli <i>K. Sørli</i>
ARKIVKODE 90A344	DATO 2009-06-17	GODKJENT AV (NAVN, STILLING, SIGN.) Roger Bjørgan, forskningssjef <i>Roger Bjørgan</i>	

## SAMMENDRAG

I denne rapporten er det gjennomført testing med systematiske korreksjoner av SIMRA-prediksjoner ved bruk av flydata. Disse korreksjonene er gjort på grunnlag av sammenligninger mellom ukorrigerte simuleringer og flydata i øvre del av SIMRA-området, hvor både vindstyrke og retning gis en konstant korreksjon.

Analyser av tilgjengelige flydata for Værnes-området viser at det idag finnes relativt få data-registreringer, maksimalt 2 - 3 fly pr dag med et typisk mellomrom på 3 - 5 timer. Med så spredte data tilgjengelig er det foreløpig langt igjen før slike korreksjoner kan benyttes i varsling, men det er likevel verdt å undersøke alternative metodikker med tanke på framtidig bruk.

For å utnytte alle tilgjengelige flydata, dvs. data-registreringer langs hele flybanen i SIMRA-området, er det nødvendig å generalisere metodikken slik at terreng-effekten kan tas hensyn til. Bruk av sensitivitetsfelt er en mulig metodikk for å gjøre nettopp dette. En slik metode er testet i denne rapporten for et forenklet 2D tilfelle, og den naturlige fortsettelsen vil være å gjennomføre tilsvarende testing med 3D topografi. En slik generalisering planlegges i videreføringen av dette prosjektet.

STIKKORD	NORSK	ENGELSK
GRUPPE 1		
GRUPPE 2		
EGENVALGTE		

# Innhold

<b>1 Innledning</b>	<b>3</b>
<b>2 Antakelser</b>	<b>3</b>
<b>3 Resultater</b>	<b>4</b>
3.1 Testsimulering med konstruerte randbetingelser . . . . .	4
3.2 Simuleringer med historiske data . . . . .	7
3.2.1 Test 2008.03.06 . . . . .	7
3.2.2 Test 2009.01.08 . . . . .	11
3.3 Diskusjon . . . . .	11
<b>4 Systematisk bruk av flydata</b>	<b>15</b>
<b>5 Sensitivitetsanalyse</b>	<b>16</b>
5.1 Sensitivitetsligninger for 3D-områder . . . . .	17
5.2 Førsteordens sensitivitetsligninger for $c$ og $\theta$ . . . . .	17
5.3 Iterasjon og tidsintegrasjon . . . . .	18
5.4 Metode for korreksjon av initielt estimat $c_0$ og $\theta_0$ . . . . .	18
5.5 Test på hvor god metoden er på å rekonstruere vindretning . . . . .	19
5.5.1 Rekonstruksjon med stående virvel bak sylindere . . . . .	19
5.5.2 Rekonstruksjon med virvelavløsning bak sylindere . . . . .	20
5.6 Bruk av sensitivitetsfelt for 3D-områder . . . . .	21
<b>A Appendiks:</b>	
Modifikasjon av preprosessor-program: <code>ibc.f90</code>	<b>26</b>
<b>B Appendiks:</b>	
Sammenheng mellom høydenivå og hydrostatisk trykk	<b>27</b>
<b>C Appendiks:</b>	
Justering av logaritmiske betingelser i Simra	<b>28</b>

# 1 Innledning

Muligheten for bruk av flydata til korreksjon av SIMRA-prediksjoner er tidligere diskutert i [Sørli & Utnes (desember 2008)]. Med utgangspunkt i en slik metodikk kan simuleringene i SIMRA korrigeres ved å justere *initial- og randbetingelser*. Enkle metoder for å gjennomføre slike korreksjoner av vindstyrke og retning er beskrevet i det følgende, og det er i tillegg gjennomført to simuleringer med historiske data og forsøk på bruk av flydata for å korrigere prediksjonene.

Vi har benyttet Værnes som eksempel bl.a. fordi det registreres data fra en del fly som lander og går ut fra denne flyplassen. Men en nærmere analyse viser at det idag bare finnes data-registreringer fra maksimalt 2 - 3 fly pr. dag, med et typisk tidsrom på 3 - 4 timer mellom hvert fly, med noen unntak. Dette er for sparsomme datamengder til at vi kan tenke på bruk i varsling, men det er likevel verdt å undersøke alternative metodikker med tanke på framtidig bruk, når antall data-registreringer øker.

# 2 Antakelser

Siden mengden tilgjengelige flydata foreløpig er sterkt begrenset, antas at en konstant korreksjon foreløpig er mest relevant. Anta at sammenligninger mellom flydata og simuleringresultater for det aktuelle tidsrommet gir et midlere konstant avvik for vindstyrke ( $dU_A$ ) og vindretning ( $d\theta$ ) i en gitt høyde. Korrigert vindstyrke og retning i dette høydenivået blir da

$$U_A^{cor} = U_A^{uncor} + dU_A; \quad \theta^{cor} = \theta^{uncor} + d\theta \quad (1)$$

Dersom vi bare benytter *høydedata*, dvs. data i en høyde ( $z_{asm}$ ) langt over lokale fjell, antar vi at samme høyde-korreksjon gjelder for hele del lokale området. Tilsvarende gjelder at hvis det lokale terrenget er relativt flatt mellom randen for innkommende vind og flybanen, så antas også at samme korreksjon gjelder for ytre rand og området rundt flybanen. For det generelle tilfellet med fjellterreng mellom ytre rand og flybanen blir forholdene mer kompliserte, og det trengs en mer generell tilnærming. Dette blir diskutert i seksjon 4.

Her antar vi foreløpig følgende forenklede tilfeller:

- Bruk av *ren høyde-korreksjon*, dvs. bare bruk av høydedata, eller:
- Bruk av flydata langs hele inn/ut-flygningsbanen forutsatt *flatt terreng/hav mellom ytre rand for innkommende vind og flybanen*.

Begge disse alternativene gir en konstant korreksjon med en-til-en relasjon mellom korreksjon langs flybanen og korreksjon langs ytre rand for innkommende vind.

For den vertikale variasjonen gjør vi følgende tilleggsantakelser:

1. Vindstyrken korrigeres ved å anta *similaritet*, dvs. at korrigert vindstyrke antas å ha samme vertikale trend som bakgrunnsprofilen fra simuleringen.
2. Retningskorreksjonen ( $d\theta$ ) antas konstant i hele vertikalretningen, dvs. at den korrigerede vindretningen blir lik bakgrunnsretningen pluss konstant korreksjon i hele vertikalretningen.

Det første punktet betyr at hastighetskorreksjonen kan skrives som

$$dU_A(z) = (\Lambda - 1)U_A^{uncor}(z); \text{ hvor } \Lambda = U_A^{cor}(z_{asm})/U_A^{uncor}(z_{asm}) \quad (2)$$

En enkel kontroll er å betrakte tilfellet med homogen strømming over horisontalt terreng. For dette tilfellet gjelder relasjonen

$$dU_A(z) = \frac{\ln(z/z_0)}{\ln(z_{max}/z_0)} dU_A(z_{asm})$$

som stemmer med antakelsen ovenfor og ligning (2).

## 3 Resultater

### 3.1 Testsimulering med konstruerte randbetingelser

Dette tilfellet er hovedsakelig for å kontrollere at prosedyren fungerer som den skal. Geometrien tilsvarende den som brukes for turbulensvarsling ved Værnes lufthavn, men initial- og randbetingelsene er konstruert for et forenklet tilfelle med konstant vind fra sør-øst (135 grader) og med en vindstyrke på 20 m/s i 2 km høyde.

Vi antar deretter en justering fra en tenkt assimilering som innebærer:

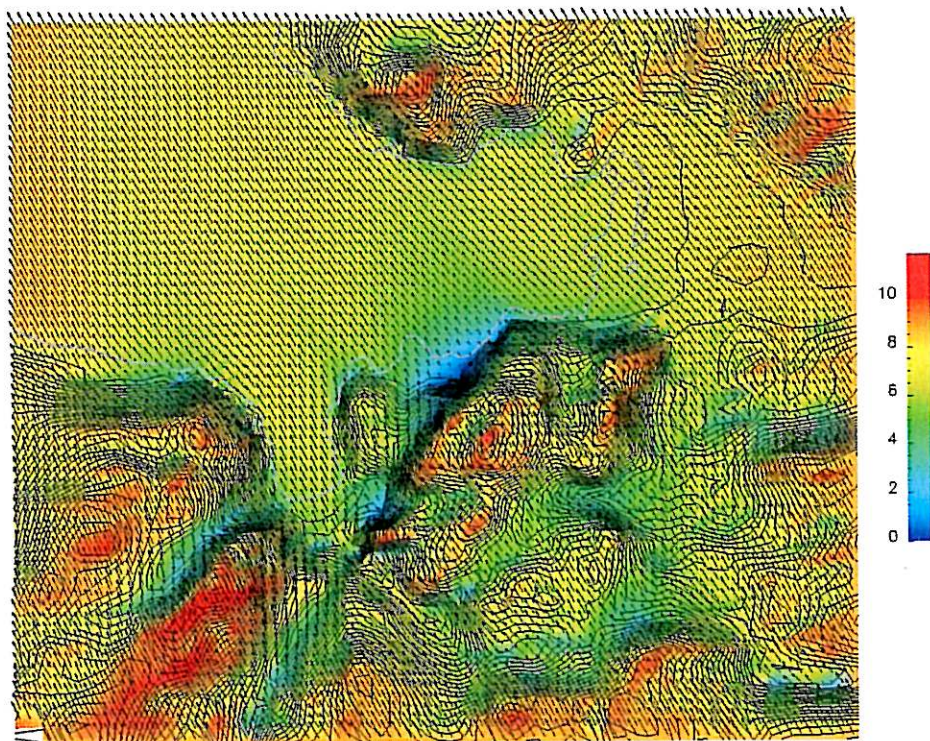
- Økning i vindstyrke på 5 m/s i 3 km høyde
- Dreining av vindretningen fra 135 grader til 150 grader

Følgende datafil definerer disse korreksjonene, og gis som input til preprocessor-programmet `ibc.f90` som beregner initial og randfelt:

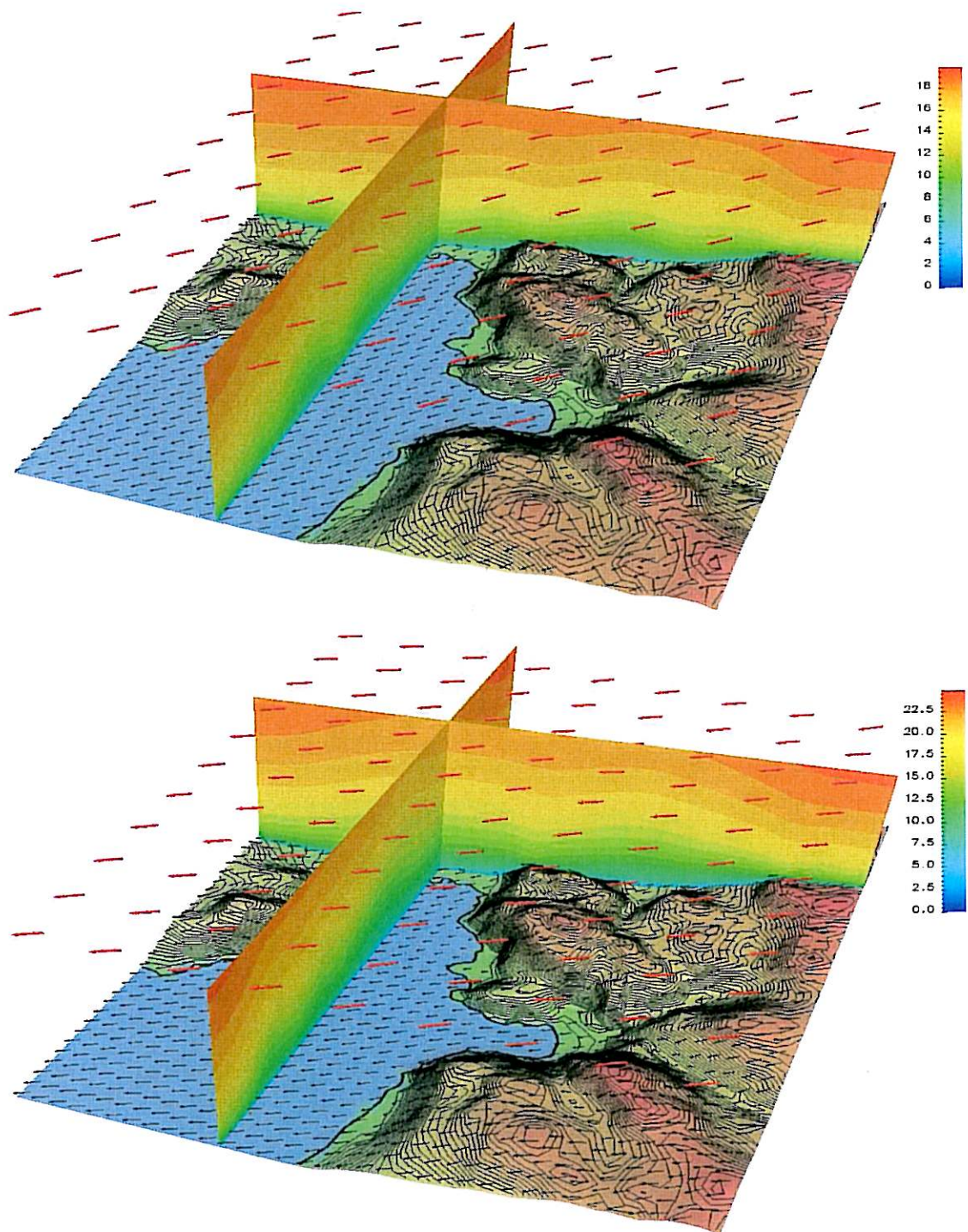
```
1                ! ind_assim:  0=no correction, 1=correction
25.0, 20.0       ! UA_flight  , UA_um1   (m/s)
150.0,135.0     ! theta_flight, theta_im1 (deg)
```

Se Appendiks A for bruken av disse dataene.

Figurene 1 og 2 illustrerer effekten av disse korreksjonene. Øverst på figur 1 er vist vindfeltet i 10 m høyde (over bakkenivå) for tilfellet uten korreksjon. Nederst på figuren ser vi tilsvarende resultat etter at korreksjonene er inkludert. De to effektene vises tydelig: Vindstyrken har økt merkbart samtidig som vinden har dreid mot sørlig retning. Begge effektene er som ventet, og illustrerer at metodikken fungerer som forutsatt. Figur 2 illustrerer samme situasjon sett i perspektiv og med vertikalsnitt for vindstyrke.



Figur 1: Testsimuleringer med konstruert korreksjon av initial- og randbetingelser. Figuren viser vindfelt i 10 m høyde over bakkenivå: Øverst uten korreksjon; nederst med korreksjon. Vindstyrken er økt med 5 m/s i 3 km høyde, og vindretningen er endret fra 135 til 150 grader.



Figur 2: Perspektivplott med vertikalsnitt av samme situasjon som tidligere. Øverst uten korreksjon; nederst med korreksjon.

## 3.2 Simuleringer med historiske data

Det er gjort to simuleringer med historiske data for Værnes-området. For disse tilfellene har vi samlet alle tilgjengelige flydata, som er relativt sparsomme, men likevel det beste som finnes idag. Vi har sammenlignet simuleringer med flydata for et tidspunkt ('pre-prediksjonstidspunktet'), og deretter korrigeret randbetingelsene ut fra denne sammenligningen for bruk i den neste simuleringen ved 'varslingstidspunktet'. Resultatene fra disse testene er vist i det følgende.

### 3.2.1 Test 2008.03.06

Fra [Sørli & Utnes (desember 2008)] har vi valgt ut følgende tidsperiode for testing: 2008.03.06, kl. 1400-1800. For denne perioden er det beregnet midlere korreksjoner av vindstyrke og retning basert på sammenligning mellom UM1-prediksjoner og fly-data i en høyde av omkring 3000 m, og Simra-prediksjoner sammenlignet med fly-data langs en flybane. <sup>1</sup> Korreksjonene for vindstyrke og retning er vist i tabellen nedenfor.

Tabell 1: Korreksjon av initial- og randverdier for vindstyrke og retning

Test nr	Grunnlag for korreksjon	Vindstyrke korreksjon	Vindretning korreksjon
1	UM1 & fly-data	3.7 [m/s]	15.0 [grader]
2	Simra & fly-data	0.0 [m/s]	-15.0 [grader]

Prediksjonstidspunktet eller kontrollpunktet er valgt til **kl 1700**, hvor det er gjennomført SIMRA-simuleringer både med og uten korreksjon, og resultatene er sammenlignet med flydata i punkter langs flybanen inn mot rullebanen på Værnes.

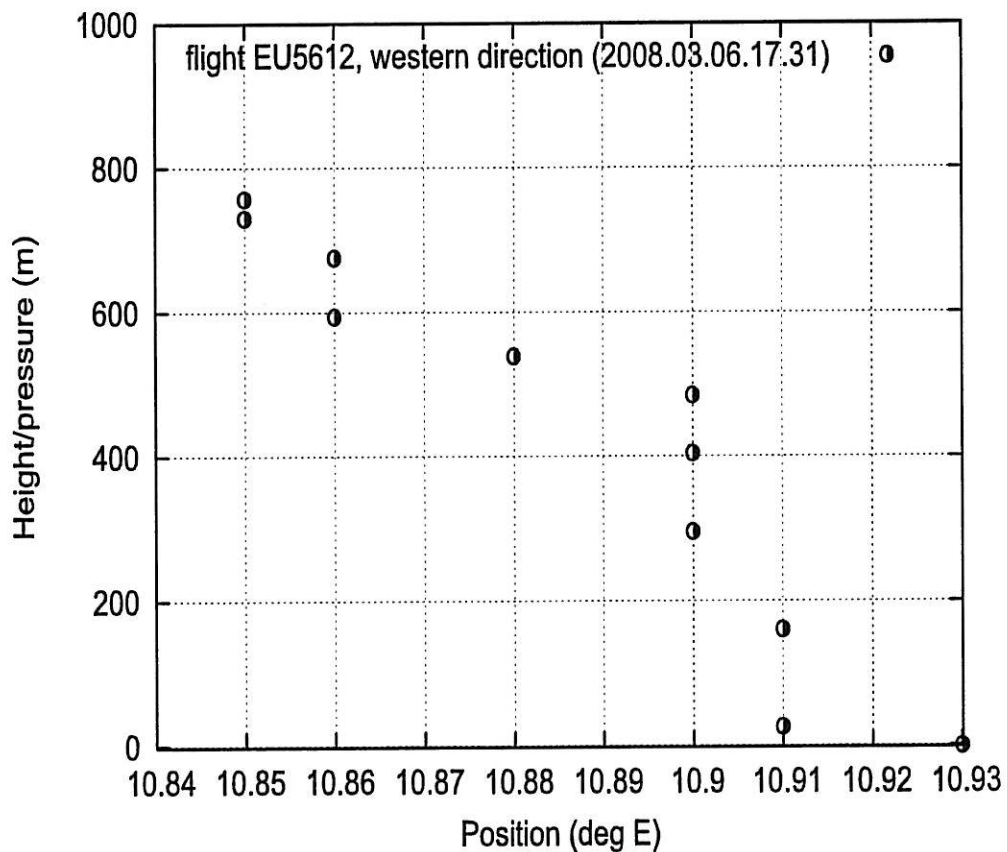
Korreksjonene for de to testene er gjort som følger: Test 1 er gjort på grunnlag av UM1-data, og sammenligningen med flydata er gjort i ca 3000 m høyde over første del av tidsperioden, med data fra to forskjellige tidspunkt, 2 - 3 timer tidligere enn prediksjonstidspunktet. Test 2 er gjort på grunnlag av sammenligning mellom Simra og fly-data for ett tidspunkt, 3 timer før prediksjonstidspunktet, men over flere punkter langs flybanen.

Et spesielt problem med fly-dataene er omregningen fra flyets trykkmålinger til høyde-data. I dette tilfellet benytter vi en forenklet løsning av den hydrostatiske ligningen (Appendiks B) og antar at atmosfæretrykket ved havoverflaten er gitt fra flyets trykkmåling i posisjonen ved Værnes flyplass. Figur 3 illustrerer disse dataene. Posisjonen angitt fra fly-dataene er bare gitt i hundredels desimalgrader, hvor  $0.01\text{grader} \sim 1\text{km}$ , og dette antas å være årsaken til at det finnes flere punkter i samme posisjon.

<sup>1</sup>Merk at beregningene i [Sørli & Utnes (desember 2008)] inneholder enkelte feil i sammenligningen mellom UM1-prediksjoner og fly-data. Dette er korrigeret for de aktuelle simuleringene.

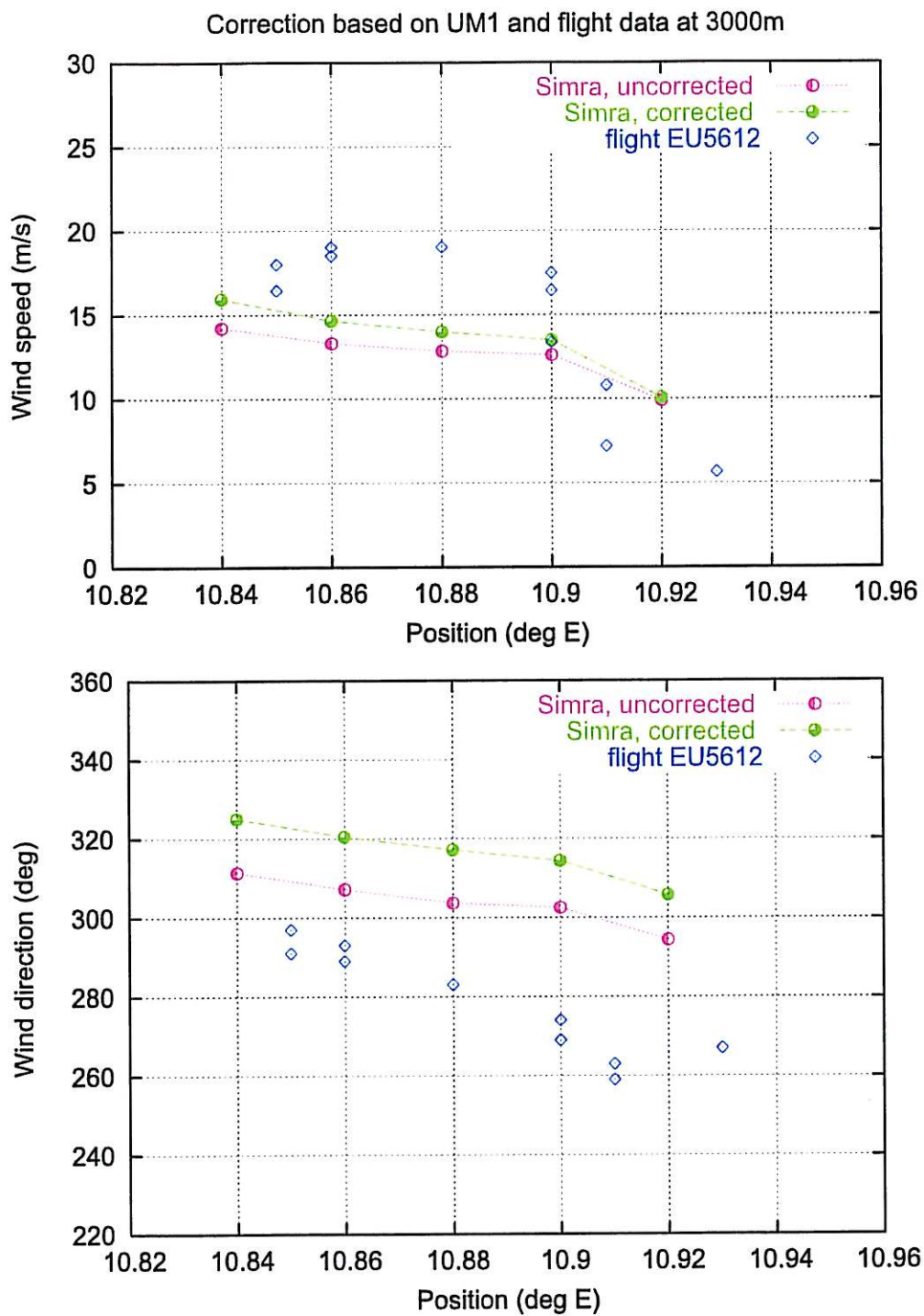
Figurene 4 og 5 viser resultatene fra disse simuleringene. Test 1 gir en forbedret prediksjon av vindstyrken, mens vindretningen korrigeres i feil retning, og blir dermed dårligere enn den ukorrigert retningen. Derimot gir Test 2 en klar forbedring av vindretning, mens vindstyrken er omtrent uendret sammenlignet med ukorrigert versjon.

En tentativ konklusjon fra disse resultatene er at det kan være bedre å benytte SIMRA-dataene som sammenligningsgrunnlag istedenfor høydedata fra UM1. Dette både fordi de øverste lagene av SIMRA-området også kan defineres som høydedata, og fordi dette i tillegg gir oss muligheten til å utvide området for sammenligning til å gjelde hele flybanen innenfor SIMRA-området.

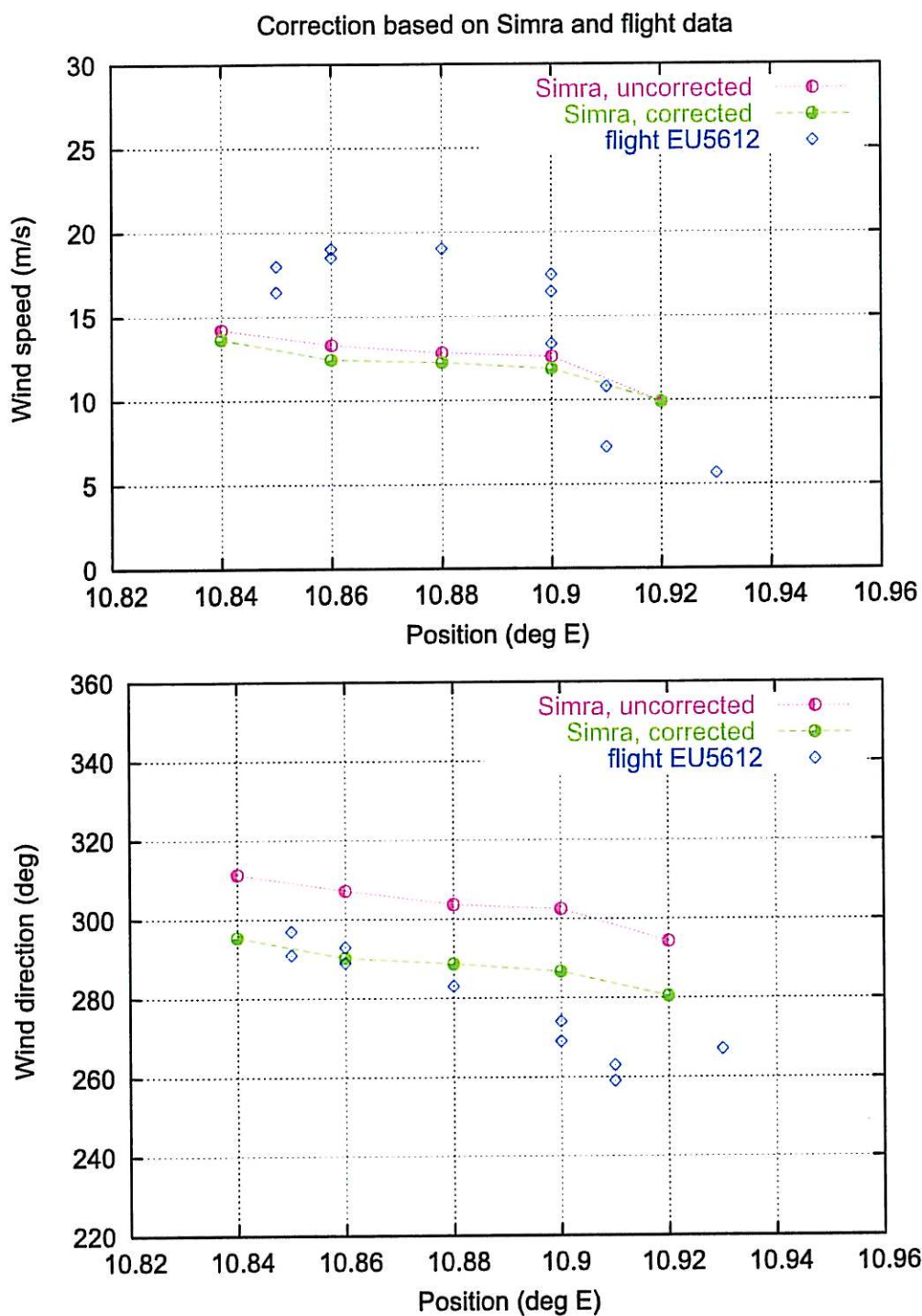


Figur 3: Beregnete høydeposisjoner basert på flyets trykkmålinger. Midlere bane har en helningsvinkel på omkring 4 grader.





Figur 4: Korrigert prediksjon for kl. 17.00 basert på Test 1 (høydedata fra UM1 og fly-data).



Figur 5: Korrigert prediksjon for kl. 17.00 basert på Test 2 (sammenligning av resultater fra Simra og fly-data langs utflygningsbane).

### 3.2.2 Test 2009.01.08

Tidsperioden for dette tilfellet er 8. januar 2009, hvor to fly har registrert data for tidspunktene 09.06 og 13.36. Begge er utgående fly med retning rett vest ut fra Værnes.

Figur 6 illustrerer beregnet høydeposisjoner for det første av disse flyene (også representativt for det andre flyet). Beregningen er gjort på grunnlag av registrert trykk, og omregnet til høyde vha estimatet i Appendiks B.

Figur 7 viser resultatene fra Simra-simuleringen ved tidspunkt 09.00 sammenlignet med tilsvarende fly-data langs flybanen fra flyplassen og ca 8 km vestover (nord for Muruvika). Vindstyrken er overpredikert av Simra med omkring 5 m/s, mens vindretningen viser forskjellige trender i fly-data og Simra-prediksjon. Det er derfor uklart hvordan en korreksjon av vindretningen langs ytre rand kan fange opp denne trenden.

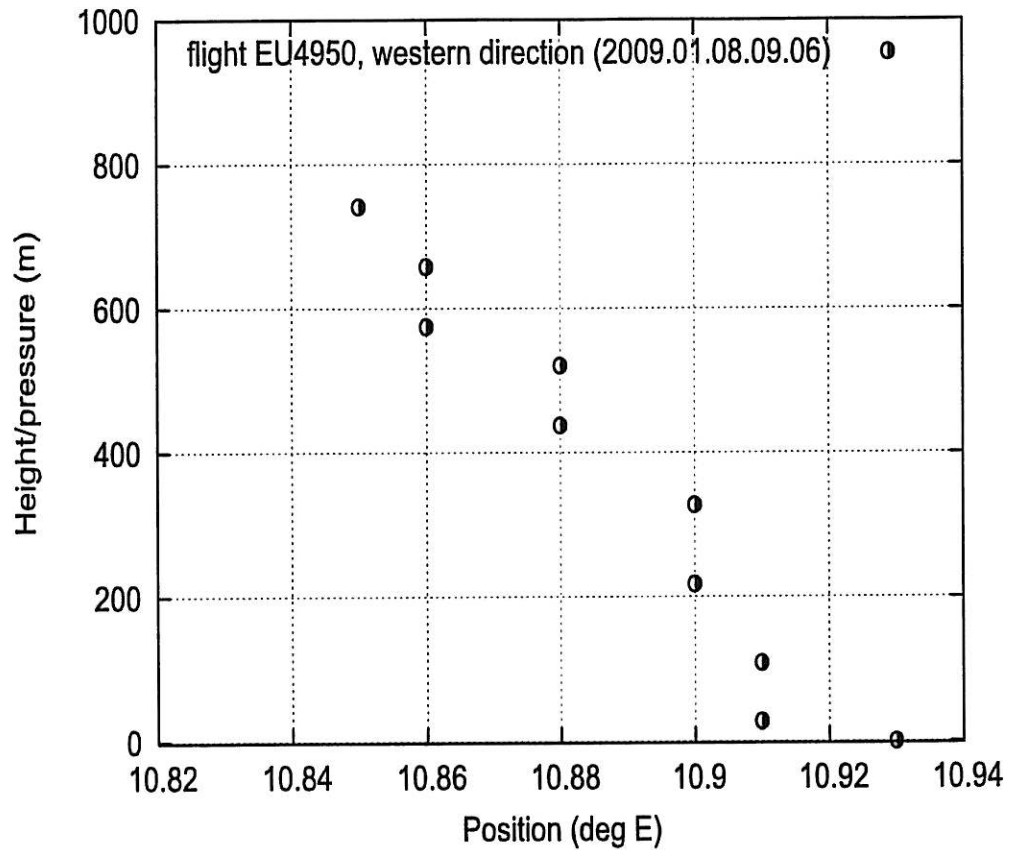
Figur 8 viser Simra-prediksjoner og tilsvarende fly-data ved tidspunktet 14.00. Her vises Simra-resultater både med og uten korreksjon. Korreksjonen er en redusert vindstyrke med 5 m/s, som følger fra forrige figur, og i tillegg er det lagt inn en dreining på 5 grader i sørlig retning. Figuren viser at korreksjonen i vindstyrke fungerer bra, mens effekten på vindretning ikke gir noen gunstig effekt. Forsøk med andre korreksjoner av vindretning ga heller ikke en ønsket effekt. For å få en *trend* som ligner den midlere fly-registreringen var det nødvendig å dreie vindfeltet i *nordlig* retning, men dette gir et avvik på ca. 15 grader langs hele flybanen.

## 3.3 Diskusjon

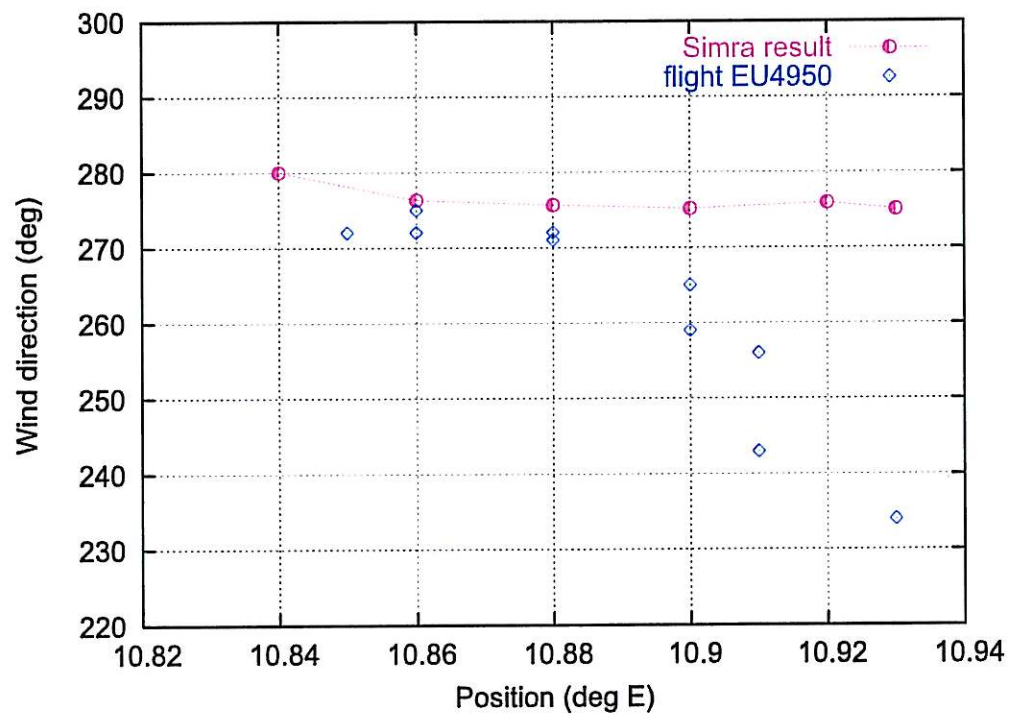
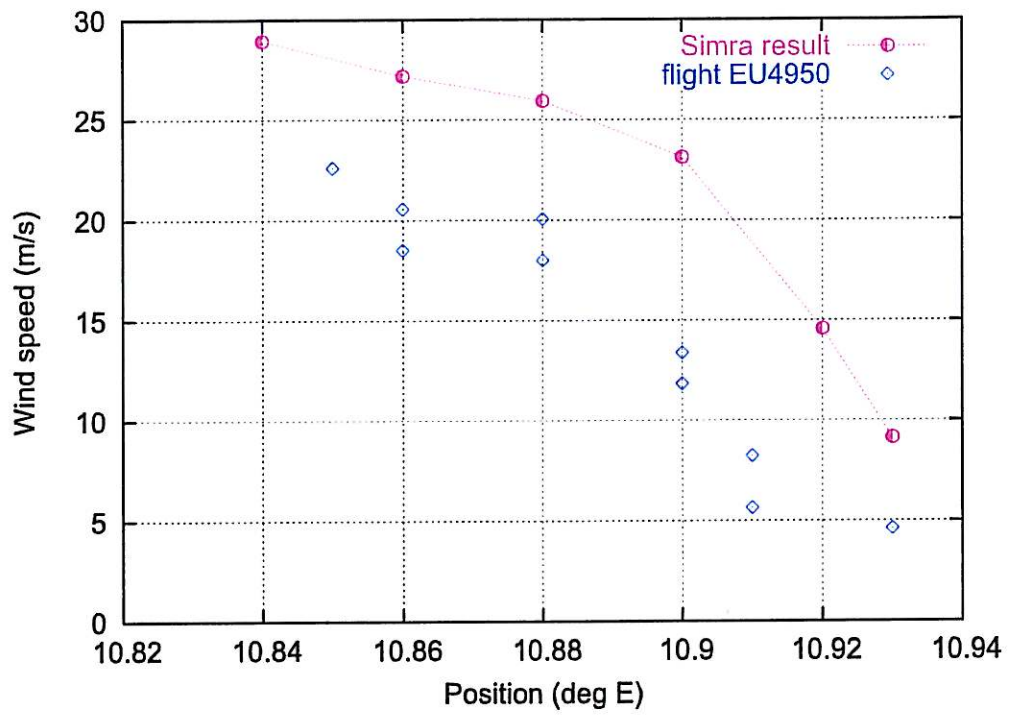
Analyser av tilgjengelige flydata for Værnes-området viser at det idag finnes relativt få data-registreringer, maksimalt 2 - 3 fly pr. dag med et typisk tidsrom på 3 - 4 timer mellom hvert fly. Med så spredte data tilgjengelig får vi ingen god tids-trend i flydataene, og må som regel anta konstante korreksjoner fra ett datasett. Hvis vi i tillegg bare benytter høydedata, gir dette i praksis bare en punkt-måling. Derfor virker det mer rasjonelt å bruke alle tilgjengelige data langs flybanen, og resultatet fra testsimuleringene 2008.03.06 synes å bekrefte dette. I begge testene, 2008.03.06 og 2009.01.08, var vær-situasjonen vestlig vind, og vinden som kommer fra vest er ikke påvirket av lokalt terreng i SIMRA-området. Dermed har vi antatt at rand-korreksjonen er lik midlere avvik mellom modell og flydata i analyse-perioden. (Det generelle tilfellet med fjellterreng mellom ytre rand og flybane vil komplisere dette bildet, se seksjon 4.)

Resultatene er blandet: I det første tilfellet gir korreksjonen en klar forbedring av vindretning, mens vindstyrken ikke lett lar seg korrigeres. I det andre tilfellet er det motsatt. Vindstyrken korrigeres fornuftig, mens vindretningen ikke lar seg korrigeres på noen enkel måte. Ingen av korreksjonene forverrer resultatet.

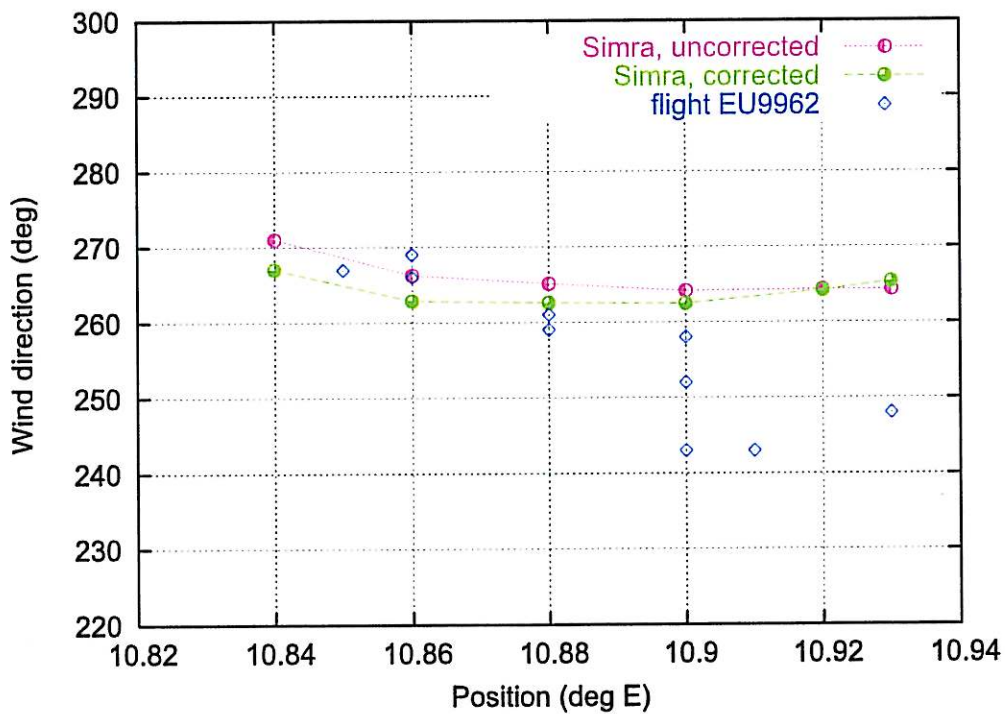
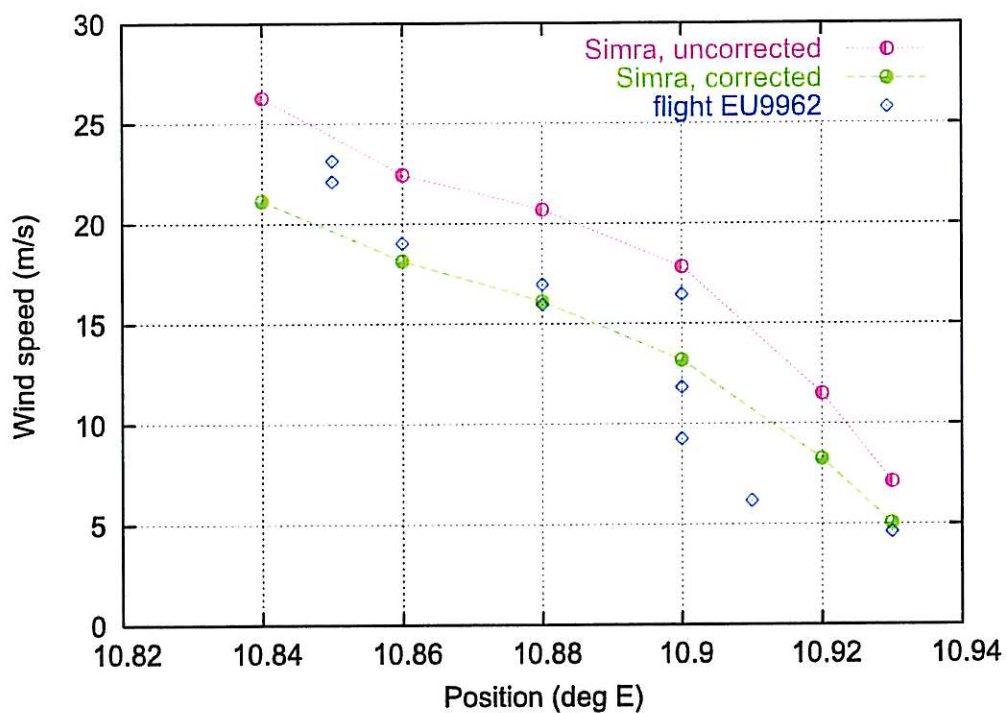
Disse eksemplene indikerer derfor at det er mulig å korrigere resultatene med bruk av flydata, men at det er sterkt ønskelig med flere datasett spredt jevnt ut i tid. Det er også ønskelig å forbedre kvaliteten på flydataene, bl.a. ved at posisjonsangivelsen forbedres fra desimalgrader med to desimaler til tre desimaler.



Figur 6: Beregnet høydeposisjoner for EU4950 basert på flyets trykkmålinger.



Figur 7: Ukorrigert Simra-prediksjon for kl. 09.00



Figur 8: Simra-prediksjon for kl. 14.00. Korreksjonen er basert på sammenligninger ved tidspunktet 09.00

## 4 Systematisk bruk av flydata

På grunn av det sparsomme data-grunnlaget er det ønskelig å benytte alle tilgjengelige flydata, dvs. alle data innenfor Simra-området langs hele inn- eller ut-flygningsbanen. I lavere høyde vil terrengeffekter generelt øke, og en effektiv korreksjonsmetode blir dermed mer komplisert. For slike tilfeller trenger vi en systematisk og generell metode.

Generelt kan vi skrive en prediksjon/varsling ( $x_a$ ) som summen av en bakgrunnsløsning ( $x_b$ ) pluss et korreksjonsledd:

$$x_a = x_b + K(y - Hx_b) \quad (3)$$

hvor:

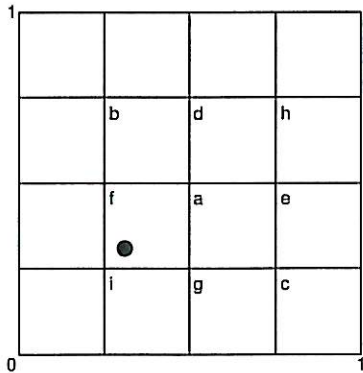
- $x_b$  er bakgrunnsløsningen (Simra-prediksjon uten korreksjon)
- $y$  er observerte (fly)data
- $H$  er en interpolasjonsmatrise som gir  $x_b$  i punkter der  $y$  er spesifisert
- $K$  er en vektmatrise som veier korreksjonen av  $x_b$  ut fra observasjonsdataene

I klassiske metoder benyttes relasjoner av typen (3) til å korrigere initialbetingelser for hele feltet. I vårt tilfelle med lokal assimilering, spiller randbetingelsene en avgjørende rolle, og vi søker derfor å benytte en korreksjon av denne typen til å justere selve randbetingelsene.

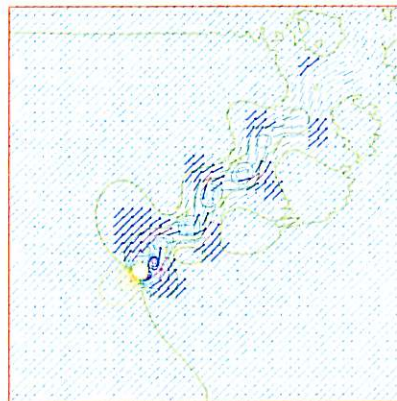
Hovedproblemet er å bestemme en vektmatrise  $K$ , eller mer generelt, et korreksjonsledd  $K(y - Hx_b)$ . En mulig metode er å benytte sensitivitetsanalyse til å konstruere relative 'vektfunksjoner' som er gyldige for et gitt terreng. Slike sensitivitetsanalyser må i prinsipp gjøres for mange forskjellige vindretninger, hvor resultatene kan lagres for bruk ved aktuelle varslingssituasjoner. I det følgende gis en beskrivelse av metodikken for en slik sensitivitetsanalyse sammen med resultater fra et 2D beregningseksempel.

## 5 Sensitivitetsanalyse

Appendiks B av Utnes & Sørli [Utnes & Sørli (juli 2008)] beskriver en metode for beregning av sensitivitet for et enkelt 2-dimensjonalt (2D) strømningsfelt med en sirkulær hindring. Denne analysens målsetting var å finne strømningsfeltets sensitivitet for variasjon i vindstyrke på området rand der luft kommer inn i beregningsområdet. For enkelhets skyld lot vi området være 2D og rektangulært med en sirkulær hindring med gitt diameter og plassering. Dette er illustrert i Figur 9. Vindretningen antok vi enten å være konstant sør-vestlig som i Figur 10, eller kontinuerlig varierende mellom sør og vest. Det resulterer i at den sørlige og vestlige delen av randa er innstrømsegmenter. Spørsmålet vi stilte oss var hvilke deler av strømningsområdet som er mest sensitiv for endringer i vindstyrke på disse innstrømsegmentene. Analysen viste at i punktene  $f$ ,  $g$ ,  $d$  og  $e$  i ytterkant av virvelgaten (se Figurene 9 og 10) var sensitiviteten størst. I de to punktene  $b$  og  $c$  lenger ute var sensitivitet mindre, i punktet  $i$  foran sylindringen var den enda litt mindre, og de to punktene  $a$  og  $h$  i senterlinjen av virvelgaten var sensitiviteten minst.



Figur 9: Punkt plassering ( $a, \dots, i$ ) for måling av sensitivitet.



Figur 10: Et typisk scenario med sør-vestlig vind og resulterende virvelgate.

I denne seksjonen beskriver vi et arbeid som er en videreføring av ovennevnte arbeid og analyse. Hovedmålsettingen er å finne en metode for å bestemme randbetingelser på innløpsreder ut fra målinger av vind (både retning og styrke) i det indre av området. Vi forutsetter at vi har et grovt estimat av disse randbetingelsene på forhånd. Dette kan enten være en såkalt bakgrunnsløsning eller et estimat basert på en forenklet overføring av målinger i det indre av området til innløpsranda til området.

Vi utleder først sensitivitetsligninger for vindretning og vindstyrke for det generelle tre-dimensjonale tilfellet (3D). Deretter tester vi ut metoden for samme 2D-tilfellet som nevnt ovenfor.



## 5.1 Sensitivitetsligninger for 3D-områder

Vi generaliserer metoden beskrevet i nevnte rapport til å gjelde reelle 3D-områder (flyplassområder). Vi vil for enkelthets skyld anta at vi har laminær strømning. Laminær, ikke-stasjonær og inkompressibel strømning av en viskøs væske i et 3D område  $\Omega$  er beskrevet av væskens hastighet  $\mathbf{u} = (u, v, w)$  og trykk  $p$ .

Funksjonene  $\mathbf{u}$  and  $p$  blir kalt *tilstandsfunksjoner* og dette settet av tilstandsfunksjoner blir kalt en *tilstandsløsning*. Dette betyr at hastighet og trykk i hvert punkt i  $\Omega$  fullstendig beskriver tilstanden til det fysiske systemet som betraktes.

Gitt våre antagelser om problemet så kan vi anta at strømningsfunksjonene  $\mathbf{u}$  og  $p$  tilfredsstiller Navier-Stokes' ligninger for laminær, ikke-stasjonær, inkompressibel og viskøs strømning i hvert punkt i strømningsområdet  $\Omega$ . Disse ligningene kan skrives som

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nabla \cdot (\nu \nabla \mathbf{u}) + \nabla p = 0 \quad (4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (5)$$

med følgende randbetingelser

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_1 \quad (6)$$

$$\mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_0 \quad (7)$$

$$\nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_2 \quad (8)$$

$$\nabla p \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_0 \quad (9)$$

$$p = 0, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_2 \quad (10)$$

der  $\Gamma_0$ ,  $\Gamma_1$  og  $\Gamma_2$  er randflater for h.h.v. *hindring*, *innløp* og *utløp*. I tillegg antar vi at innløpsbetingelsen er gitt ved

$$\mathbf{u}_1 = (c \cos \theta, c \sin \theta, 0) \quad (11)$$

der vi har antatt at hastigheten er horisontal, med styrke  $c$  og retning  $\theta$  (f.eks. er  $\theta = 45^\circ$  sør-vestlig vind).

Ligningene (4) og (5) blir referert til som h.h.v. *momentumligningen* og *kontinuitetsligningen*. I ligningen (4) betegner  $\nu$  *kinematisk viskositet*.

## 5.2 Førsteordens sensitivitetsligninger for $c$ og $\theta$

For å utlede førsteordens sensitivitetsligninger antar vi at det eksisterer en spesiell løsning  $(\mathbf{u}^0, p^0)$  av Navier-Stokes' ligninger (4)-(5), med randbetingelsene (6)-(10). Vi er interessert i de førstederiverte av tilstandsfunksjonene m.h.p. parameterne  $c$  og  $\theta$ . For å finne ligninger som sier noe om hvordan disse funksjonene oppfører seg differensierer vi ligningene og randbetingelsene m.h.p.  $c$  og  $\theta$  og bytter på differensieringsrekkefølgen slik at differensiering m.h.p. denne parameteren blir utført først. Vi innfører følgende kortnotasjoner:

$$\mathbf{u}_k \equiv \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial k}, \quad p_k \equiv \frac{\partial p}{\partial k} \quad \text{for } k = c, \theta \quad (12)$$

De resulterende differensierte Navier-Stokes' ligninger (4)-(5) blir som følger:

$$\frac{\partial \mathbf{u}_k}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}_k - \nabla \cdot (\nu \nabla \mathbf{u}_k) + \nabla p_k = -(\mathbf{u}_k \cdot \nabla) \mathbf{u} \quad (13)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_k = 0 \quad (14)$$

De differensierte randbetingelsene har samme form som de opprinnelige randbetingelsene. Unntaket er førsteordens sensitivitet for  $\mathbf{u} = (u, v, w)$  på  $\Gamma_1$  (jfr. ligning 11)

$$u_c = \cos \theta \quad u_\theta = -c \sin \theta \quad (15)$$

$$v_c = \sin \theta \quad v_\theta = c \cos \theta \quad (16)$$

$$w_c = 0 \quad w_\theta = 0 \quad (17)$$

### 5.3 Iterasjon og tidsintegrasjon

En viktig ting å merke seg er at venstresiden av ligning 13 er identisk i formen med ligning 4. Derfor er det naturlig å formulere følgende iterative prosedyre

$$\frac{\partial \mathbf{u}_k^{(l)}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}_k^{(l)} - \nabla \cdot (\nu \nabla \mathbf{u}_k^{(l)}) + \nabla p_k^{(l)} = -(\mathbf{u}_k^{(l-1)} \cdot \nabla) \mathbf{u} \quad (18)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_k^{(l)} = 0 \quad (19)$$

siden vi da kan gjenbruke den samme koeffisientmatrisen som den for selve strømningsligningene. I mange tilfeller kan det vise seg å være tilstrekkelig med 1 iterasjon (eksplitt behandling av leddet) om tidsskrittet for tidsintegrasjonen er lite nok.

Selv om vi formulerer og løser både strømningsligningene og sensitivitetligningene som tidsavhengige problemer vil vi kun være interessert i en stasjonære løsning (som vi forutsetter eksisterer). Gangen i tidsintegrasjonen blir at vi for hvert tidsskritt først løser strømningsligningene og deretter løser sensitivitetligningene. Dette gjør at beregningstiden bare øker en brøkdel i forhold til at vi kun løste strømningsligningene.

### 5.4 Metode for korreksjon av initielt estimat $c_0$ og $\theta_0$

Vi innfører følgende funksjon  $F(c, \theta)$  som vi ønsker å minimere med hensyn til  $c$  eller  $\theta$  eller begge samtidig, gitt ved

$$F(c, \theta) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [\mathbf{u}(\mathbf{x}_i; c, \theta) - \mathbf{u}_m(\mathbf{x}_i)]^T [\mathbf{u}(\mathbf{x}_i; c, \theta) - \mathbf{u}_m(\mathbf{x}_i)] \quad (20)$$

der  $\mathbf{u}_m(\mathbf{x}_i)$  er målinger i  $n$  posisjoner  $\mathbf{x}_i, i = 1, \dots, n$ . Taylorutvikling gir med førsteordens nøyaktighet

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}; c, \theta) \approx \mathbf{u}(\mathbf{x}; c_0, \theta_0) + \mathbf{u}_c(\mathbf{x}; c_0, \theta_0)(c - c_0) + \mathbf{u}_\theta(\mathbf{x}; c_0, \theta_0)(\theta - \theta_0) \quad (21)$$

Deriverer vi  $F$  med hensyn på  $c$  og  $\theta$  får vi

$$\frac{F(c, \theta)}{\partial c} = \sum_{i=1}^n [\mathbf{u}(\mathbf{x}_i; c, \theta) - \mathbf{u}_m(\mathbf{x}_i)]^T \mathbf{u}_c(\mathbf{x}_i; c_0, \theta_0) \quad (22)$$

$$\frac{F(c, \theta)}{\partial \theta} = \sum_{i=1}^n [\mathbf{u}(\mathbf{x}_i; c, \theta) - \mathbf{u}_m(\mathbf{x}_i)]^T \mathbf{u}_\theta(\mathbf{x}_i; c_0, \theta_0) \quad (23)$$

Benytter vi ligning 21 og setter hver av disse deriverte lik 0 (nødvendig krav til minimum for  $F$ ), får vi 2 ligninger med 2 ukjente

$$a_{11}dc + a_{12}d\theta = b_1 \quad (24)$$

$$a_{21}dc + a_{22}d\theta = b_2 \quad (25)$$

der  $dc = c - c_0$  og  $d\theta = \theta - \theta_0$ . Koeffisientene er gitt ved

$$a_{11} = \sum_{i=1}^n \mathbf{u}_c^T(\mathbf{x}_i; c_0, \theta_0) \mathbf{u}_c(\mathbf{x}_i; c_0, \theta_0) \quad (26)$$

$$a_{12} = a_{21} = \sum_{i=1}^n \mathbf{u}_\theta^T(\mathbf{x}_i; c_0, \theta_0) \mathbf{u}_c(\mathbf{x}_i; c_0, \theta_0) \quad (27)$$

$$a_{22} = \sum_{i=1}^n \mathbf{u}_\theta^T(\mathbf{x}_i; c_0, \theta_0) \mathbf{u}_\theta(\mathbf{x}_i; c_0, \theta_0) \quad (28)$$

$$b_1 = \sum_{i=1}^n [\mathbf{u}_m(\mathbf{x}_i) - \mathbf{u}(\mathbf{x}_i; c_0, \theta_0)]^T \mathbf{u}_c(\mathbf{x}_i; c_0, \theta_0) \quad (29)$$

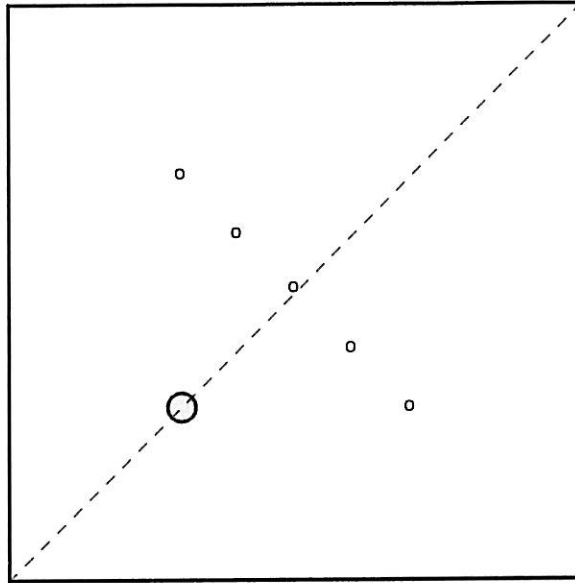
$$b_2 = \sum_{i=1}^n [\mathbf{u}_m(\mathbf{x}_i) - \mathbf{u}(\mathbf{x}_i; c_0, \theta_0)]^T \mathbf{u}_\theta(\mathbf{x}_i; c_0, \theta_0) \quad (30)$$

## 5.5 Test på hvor god metoden er på å rekonstruere vindretning

Vi har gjort to tester på hvor godt metoden klarer å rekonstruere gitte vindretninger der vi holder vindstyrken konstant. Igjen studerer vi det enkle 2D-området vi beskrev innledningsvis. Vi antar at vindretningen på innløpsranda i utgangspunktet (f.eks. fra en *bakgrunnsløsning*) er sør-vestlig, d.v.s. at  $\theta_0 = 45^\circ$ . Vindstyrken på innløpsranda setter vi lik  $c_0 = 1$ . Som målinger har vi generert 5 hastigheter på tvers av virvelgaten på den rette linjen mellom punktene  $(1, 0)$  og  $(0, 1)$  som vist på Figur 11. Disse er generert fra simuleringer for et utvalg vindretninger mellom 0 og 90 grader (vestlig til sørlig vindretning). Sensitiviteten  $\mathbf{u}_\theta(\mathbf{x}, \theta_0)$  har vi beregnet i de samme punktene for  $\theta_0 = 45^\circ$ . Resultatene er bemerkelsesverdig og er oppsummert i tabellene 2 og 3, samt figurene 13 og 14.

### 5.5.1 Rekonstruksjon med stående virvel bak sylindere

Vi gjorde først en test på hvordan metoden oppførte seg på tilfellet med en stående virvel bak sylindere. Reynoldstallet ble derfor satt til 4, som er betydelig under grensen for



Figur 11: Punkter for målinger ( $\mathbf{u}_m(\mathbf{x}_i)$ ) og sensitivitet ( $\mathbf{u}_\theta(\mathbf{x}_i, \theta_0)$ ), som ligger på en linje normalt på senterlinjen for virvelgaten.

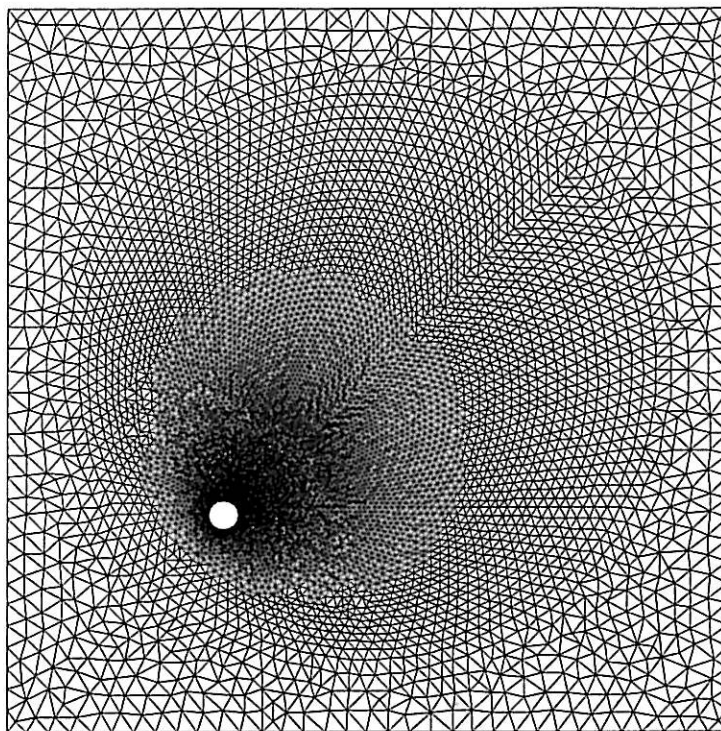
igangsetting av virvelavløsning ( $Re \approx 40$ ). Oppsettet er vist i Fig. 11 med målepunktene og meshet som ble anvendt (illustrert i Fig. 12). Resultatet er vist i Tab. 2 og i Fig. 13. Vi ser at metoden klarer å rekonstruere en endring i vindretning  $\theta$  på  $\pm 20^\circ$  med  $1.2^\circ$  nøyaktighet.

### 5.5.2 Rekonstruksjon med virvelavløsning bak sylindren

Vi gjorde også en test for å se hvordan metoden oppførte seg på tilfellet med virvelavløsning bak sylindren. Reynoldstallet ble derfor satt til 80, som er over grensen for igangsetting av virvelavløsning. Oppsettet med målepunkter er igjen som vist i Fig. 11 og mesh som

Tabell 2: Tabell-verdier for rekonstruksjon av vindretning ( $\theta_0 = 45^\circ$ ).

$\theta$	$\theta_{\text{beregnet}}$	$\theta - \theta_0$	$\theta_{\text{beregnet}} - \theta$
5	14.2454	-40	9.2454
25	26.2064	-20	1.2064
35	35.1154	-10	0.1154
40	40.0068	-5	0.0068
50	49.9936	5	-0.0064
55	54.8862	10	-0.1138
65	63.7972	20	-1.2028
85	75.7576	40	-9.2424



Figur 12: Beregningsgriddet er en Delaunay-triangulering med fortetting inn mot strømningshindret og en kontrollkurverundt hovedparten av virvelgaten.

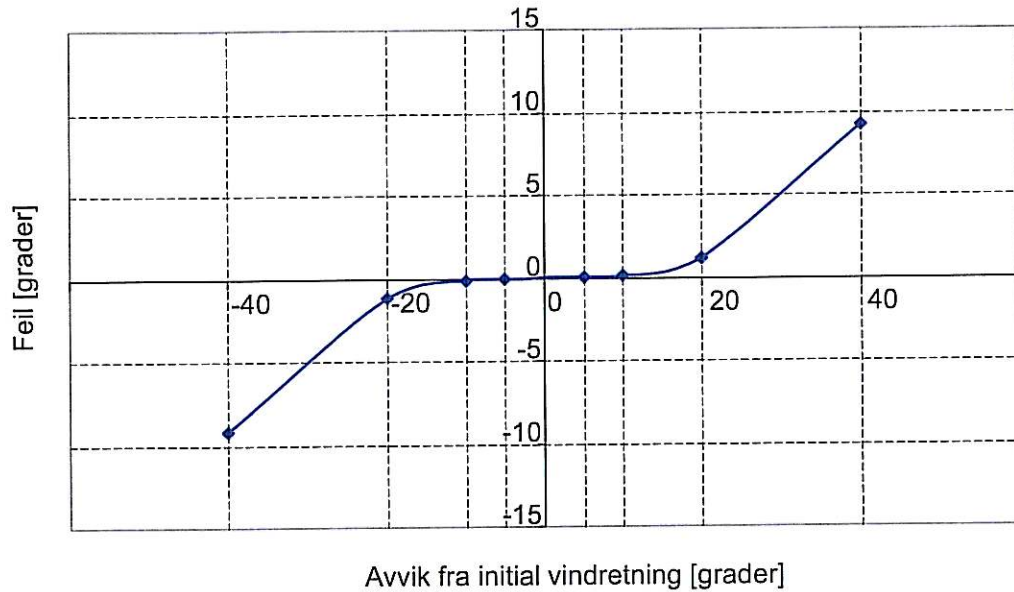
vist i Fig. 12. Resultatet er vist i Tab. 3 og i Fig. 14. I dette tilfellet har vi tidsmidlet både sensitivitet og konstruerte målinger i de 5 målepunktene som er vist i Fig. 11. Dette forholdet må undersøkes nærmere og med at vi må regne med at flymålinger kun gir *øyeblikkssituasjoner*. Med stående virvler derimot er ikke dette en aktuell problemstilling.

## 5.6 Bruk av sensitivitetsfelt for 3D-områder

Vi vil i det videre arbeid gjøre tester på et reelt 3D-tilfelle, f.eks. Værnesområdet. I første omgang vil det være naturlig å utføre en helt tilsvarende test som for 2D-tilfellet som er beskrevet foran. Det betyr at vi bestemmer oss for en gitt (horisontal) vindretning og gjør simuleringer for å bestemme et (3D) sensitivitetsfelt som gjenspeiler sensitiviteten i dette spesielle området (terrenget) ovenfor endringer i den gitte vindretningen. Vi bestemmer oss også for et sett med målepunkter i området. Det er naturlig å velge punkter i en typisk flykorridor (landings- eller avgangsrute). Ved den innledende simuleringen for den gitte vindretningen ekstraherer vi både vindhastighets- og sensitivitetsverdier i de valgte punktene. Deretter gjør vi nye simuleringer for avvikende vindretninger for å generere det vi kan tenke på som flymålinger i de gitte punktene. Vi anvender så metoden som vi beskrev i avsnitt 5.1 for rekonstruksjon av vindretning i hvert tilfelle.

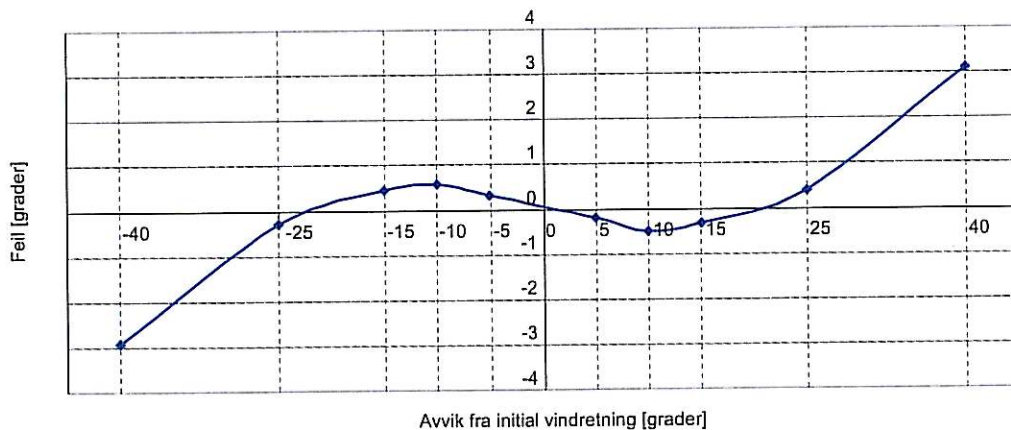
Neste skritt vil være å benytte reelle flymålinger.

Absolutt feil ved rekonstruksjon ( stående virvel -  $Re = 4$  )

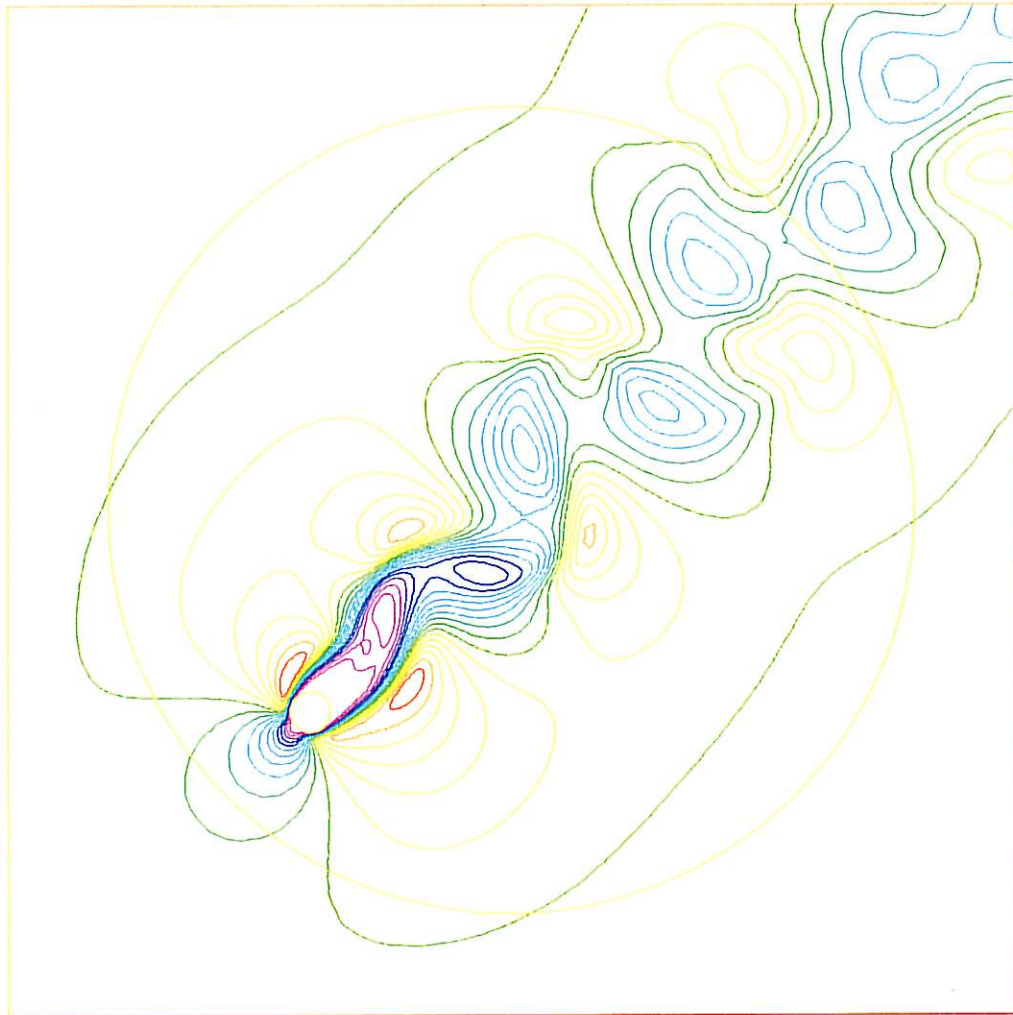


Figur 13: *Rekonstruksjon av vindretning med stående virvel bak sylinder.* Initial vindretning er  $\theta_0 = 45^\circ$  og dette er grunnlag for beregning av sensitivitetsfeltet  $u_\theta$ . Langs x-aksen er gitt avvik fra  $\theta_0$  og som er grunnlag for generering av målinger. Langs y-aksen er vist resulterende feil for metoden for rekonstruksjon av  $\theta$ .

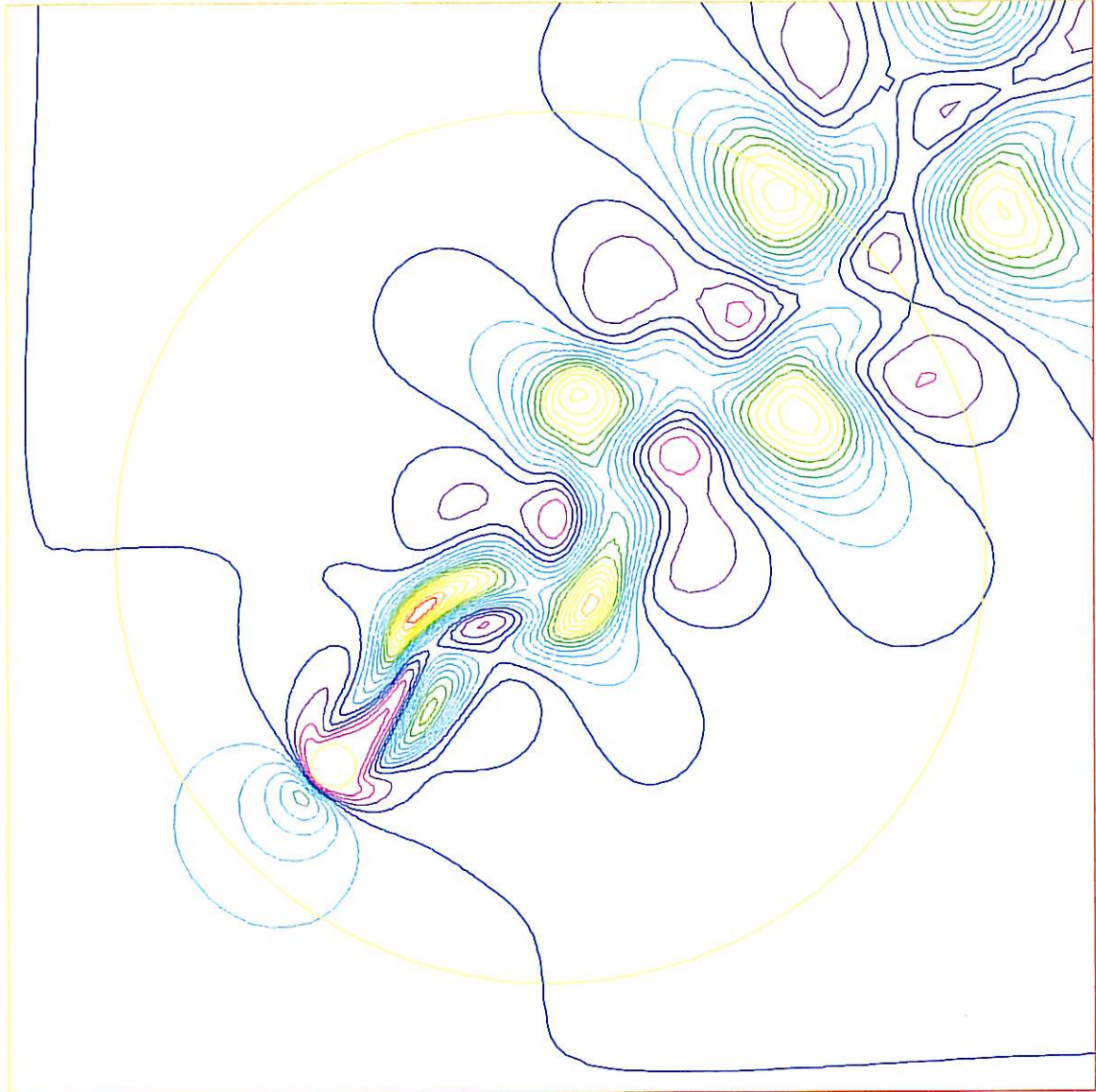
Absolutt feil ved rekonstruksjon ( virvelavløsning -  $Re = 80$  )



Figur 14: *Rekonstruksjon av vindretning med virvelavløsning bak sylinder.* Initial vindretning er  $\theta_0 = 45^\circ$  og dette er grunnlag for beregning av sensitivitetsfeltet  $u_\theta$ . Reynoldstallet er 80.



Figur 15: Situasjonsbilde av hastighet etter at *repetitiv virvelavløsning* er etablert.



Figur 16: Situasjonsbilde av sensitivitet etter at *repetitiv virvelavløsning* er etablert. Sensitivitetsverdier i de valgte målepunktene er tidsmidlet.



Tabell 3: Tabell-verdier for rekonstruksjon av vindretning (med virvelavløsning).

$\theta$	$\theta_{\text{beregnet}}$	$\theta - \theta_{\text{beregnet}}$
5	7.932120774	-2.932120774
20	20.2918501	-0.291850096
30	29.56253414	0.437465862
35	34.41674676	0.583253245
40	39.69284102	0.30715898
50	50.18710202	-0.187102022
55	55.48727129	-0.487271294
60	60.31705572	-0.317055716
70	69.601512	0.398488003
85	81.88462834	3.115371657

## Referanser

- [Utnes & Sørli (juli 2008)] T. Utnes, K. Sørli 2008: Metoder for lokal data-assimilering relatert til varsling av turbulens ved flyplasser.  
*SINTEF Report A7333.*
- [Sørli & Utnes (desember 2008)] K. Sørli, T. Utnes 2008: Assimilering av lokale data for beregning av tidsvarierende randbetingelser for turbulensvarsling ved flyplasser.  
*SINTEF Report A8865.*

## APPENDIKS

### A Appendiks:

#### Modifikasjon av preprocessor-program: ibc.f90

Korleksjoner av denne typen kan enkelt inkluderes i beregningen av initial- og randverdiene for Simra. Det følgende indikerer hvordan horisontalt hastighetsfelt kan korrigeres.

```
!*****
!      *** Assume a given velocity field (u1, u2, u3) from UM1/Simra
!      The following correction can then be performed
!
! Given:
!      UA_flight   = flight mean wind amplitude at given height [m/s]
!      UA_um1     = corresponding UM1/Simra wind amplitude      [m/s]
!      theta_flight = flight mean wind direction,
!                  given in traditional met. notation          [degree]
!      theta_um1   = corresponding UM1/Simra wind direction    [degree]
!*****
DO i=1,imax; DO j=1,jmax
  DO k=1,kmax
    ip=k+kmax*(i-1)+kmax*imax*(j-1)
    !
    !--- Correcting vind amplitude,
    !      given UA_um1 & UA_flight [m/s]
    !
    UA_old=sqrt(u1(ip)**2+u2(ip)**2)
    Lambda=UA_flight / UA_um1
    dU_cor=(Lambda-1.0)*UA_old
    UA_new=UA_old+dU_cor
    !
    !--- Correcting vind direction,
    !      given theta_um1 & theta_flight [degree]
    !
    ! Note that we use mathematical definition of rotation (counterclock),
    ! which is different from meteorological tradition (clockwise).
    ! This explains the minus sign of the correction term below.
    !
    theta_old=atan2(u2(ip),u1(ip))
    theta_new=theta_old-(theta_flight-theta_um1)/57.3 ! [rad]
    !
    !--- New, corrected horizontal velocity components
    !
    u1(ip)=UA_new*cos(theta_new)
    u2(ip)=UA_new*sin(theta_new)
  END DO
END DO; END DO
```

## B Appendiks: Sammenheng mellom høydenivå og hydrostatisk trykk

Den hydrostatiske ligningen

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g$$

kan omskrives på formen

$$\frac{1}{p} \frac{dp}{dz} = -\frac{g}{RT}$$

vha ligningen for ideell gass,

$$p = \rho RT$$

En grov approksimasjon kan gjøres ved å anta en midlere temperatur ( $T_c$ ) for de laveste km nær bakken. Dette gir følgende forenklete løsning av den hydrostatiske ligningen <sup>2</sup>:

$$\frac{p}{p_a} = \exp(-gz/RT_c) \equiv \exp(-z/H_s)$$

hvor 'skala-høyden' er definert som

$$H_s = \frac{RT_c}{g}$$

og  $p_a$  er atmosfæretrykket ved havoverflaten. Løst mhp høyden gir dette:

$$z = H_s \ln \left( \frac{p_a}{p} \right)$$

Typiske verdier for skala-høyden nær bakken ligger i området

$$H_s \in (7.5, 8.0) \text{ km.}$$

---

<sup>2</sup>A.E. Gill (1982): Atmosphere-Ocean Dynamics, Academic Press.

## C Appendiks: Justering av logaritmiske betingelser i Simra

Nær bakkenivået antas hastigheten å følge en standard logaritmisk veggbetingelse som gjelder for ru vegg:

$$u_t = \frac{u_*}{\kappa} \ln \left( \frac{h}{z_o} \right) \quad (\text{i})$$

$$u_n = 0 \quad (\text{ii})$$

Her representerer  $u_t$  og  $u_n$  hhv tangential og normal komponent,  $h$  betegner koordinatretningen vinkelrett mot bakken,  $z_o$  er ruhetsparameteren og  $\kappa \approx 0.41$  er von Karmans konstant. Problemet med å bruke (i) som randbetingelse er at både  $u_t$  og  $u_*$  er ukjente. Hvis oppløsningen er god, er heft-betingelse den riktige randbetingelsen,

$$(u_t, u_n) = (0, 0) \text{ på } z = z_o \quad (\text{iii})$$

og (i) kan da brukes til å finne  $u_*$  ved nær-veggsnoder hvor  $u_t$  beregnes. Men hvis oppløsningen ikke er god nok, vil dette føre til unøyaktigheter, og man bør da i stedet benytte en annen strategi.

Fra (i) følger at tilsvarende hastighetsgradient blir

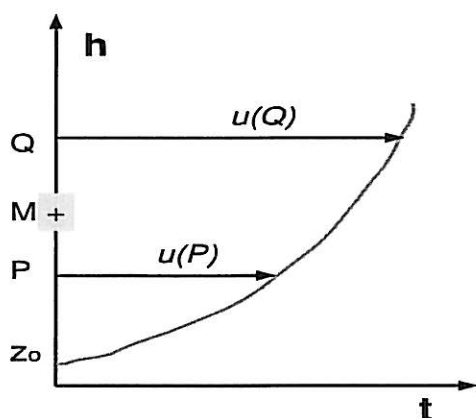
$$\frac{\partial u_t}{\partial h} = \frac{u_*}{\kappa h} \quad (\text{iv})$$

Ved å sette inn fra (iv) i ligning (i) fås en generell form for den logaritmiske betingelsen:

$$\boxed{u_t = h \frac{\partial u_t}{\partial h} \ln \left( \frac{h}{z_o} \right)} \quad (\text{v})$$

Dette er en såkalt Robin-betingelse hvor både den variable  $u_t$  og dens normalderiverte er ukjente. Denne relasjonen kan anvendes på nær-veggs noder enten som en justering eller en randbetingelse istedenfor heftbetingelsen (iii).

I den numeriske approksimasjonen antas multilineære elementer. Figur 6 illustrerer et vindprofil nær bakken, hvor node  $P$  ligger i en avstand  $h = h_P$  fra bakken (inkludert ruhetsparameteren  $z_o$ ).



Figur 17: Velocity profile

Node  $Q$  antas plassert like utenfor  $P$ , og vi benytter approksimasjonen

$$\left(\frac{\partial u_t}{\partial h}\right)_M \approx \frac{u_t(Q) - u_t(P)}{\Delta_{PQ}} \quad (\text{vi})$$

hvor  $\Delta_{PQ} = |h_Q - h_P|$ , og indeks 'M' refererer til midtpunktet mellom nodene  $P$  og  $Q$ . Et uttrykk for  $u_t(P)$  kan da utledes som funksjon av  $u_t(Q)$ :

$$u_t(P) \approx \left(\frac{R - 1/2}{R + 1/2}\right) u_t(Q) \quad (\text{vii})$$

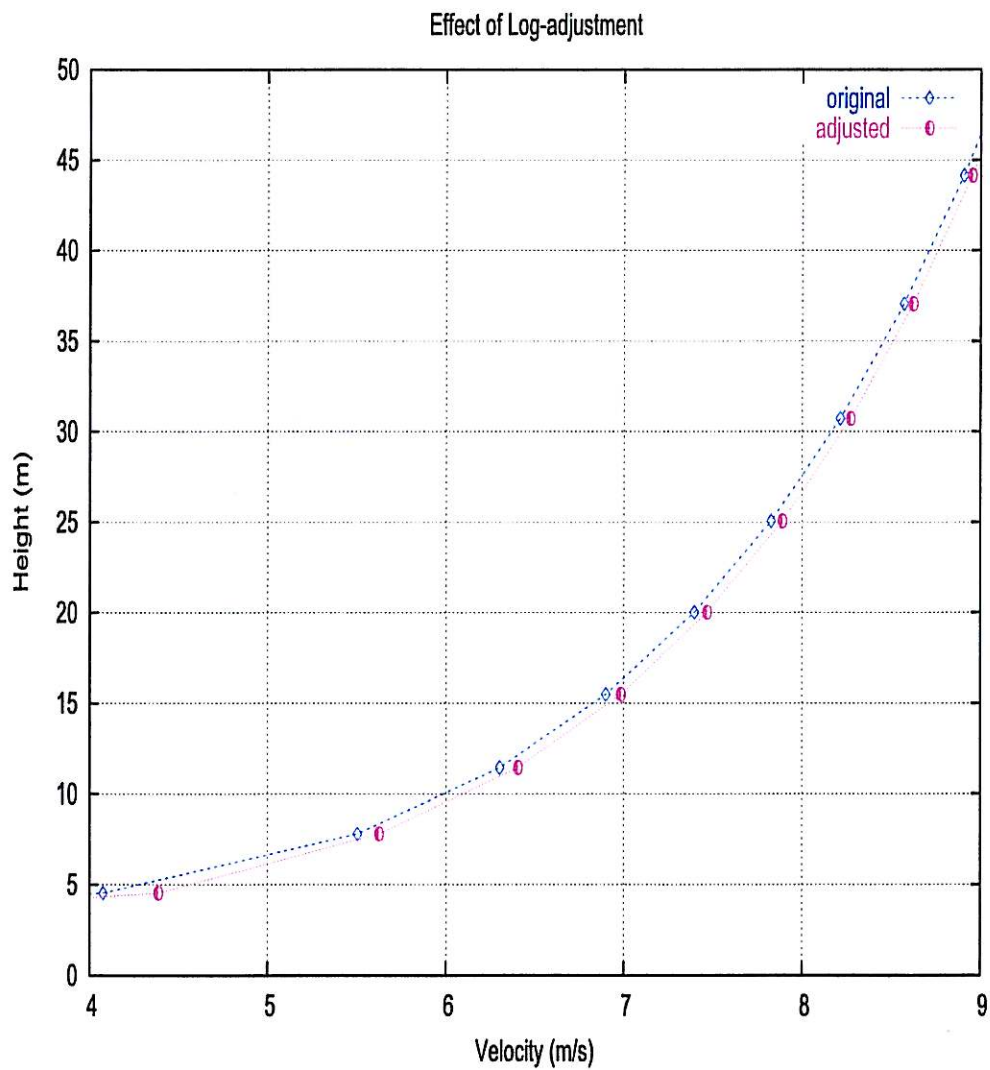
hvor 'reduksjonsfaktoren'  $R$  er gitt som

$$R = \frac{h_M}{\Delta_{PQ}} \ln \left(\frac{h_M}{z_0}\right) \quad (\text{viii})$$

og  $h_M = h_P + \frac{1}{2}\Delta_{PQ}$ .

I praksis må tangentialhastigheten  $u_t$  dekomponeres i globale koordinater før den kan benyttes numerisk, og det er da også rimelig å anta at retningen er omtrent den samme i nodene  $P$  og  $Q$ .

I Simra benyttes alltid heftbetingelsen (iii) på bakkenivået ( $z_0$ ); i tillegg kan vi også inkludere en justering basert på (v, vii) for å sikre at logaritme-betingelsen er godt oppfylt. Figur 7 illustrerer effekten med og uten en slik justering, basert på tilfellet fra testeksemplet i seksjon 3.1. I dette tilfellet er justeringene små, dvs. at oppløsningen er relativt bra.



Figur 18: Effekt av korrigert Log-betingelse nær bakkenivå. Figuren viser vindprofil med og uten korreksjon; simuleringsresultat fra testeksempel, profilet er tatt ved Værnes lufthavn.