

# Skjær-friksjons-hypotesen

AV SIVILINGENIØR TORE IVAR SVARE



Norges  
byggforsknings  
institutt  
1975

særtrykk 240

Ett av problemene vi støter på ved dimensjonering av byggverk med betongelementer, er å utforme sammenføyningsdetaljene riktig. Ikke så sjelden har det vært valgt ugunstige løsninger som kan føre til små eller store sprekker. Ofte er de uten betydning for stabilitet eller styrke, men kan iblant ha stor psykisk innvirkning på byggverkets eier. I noen tilfeller kan også byggverkets styrke og stabilitet bli forstyrret. Vi vil

her diskutere en enkel metode som kan benyttes for dimensjonering av flere typer overføringsdetaljer. Metoden som er kalt skjær-friksjons-hypotesen, har vært brukt i USA i 15 år. I siste amerikanske betongstandard (ACI 318-71) er den tatt inn som en dimensjoneringsmetode ved overføring av skjærkraft i de tilfeller der skråstrekket er lite.

## Dimensjoneringsfilosofi

En forbindelse mellom to eller flere elementer kan bli utsatt for en kombinasjon av moment, skjær, aksialt strekk og trykk og dertil opplagringstrykk. Hvilke av disse kreftene som sammenføyningen må dimensjoneres for, er avhengig av konstruksjonens utforming.

Selv etter at kreftene er bestemt, er ikke alle problemer overvunnet, da det er meget vanskelig å bestemme spenningsfordelingen eksakt. Lastene overføres også fra én komponent til en annen gjennom små kontaktflater, og produksjons- og montasje-unøyaktigheter gjør at to knutepunkter ikke blir like. Dette fører igjen til at spenningsfordelingen varierer fra tilfelle til tilfelle. Videre blir sammenføyningene utsatt for vanskelig beregnbare krefter som skyldes svinn, krypning, temperaturforandringer og setninger i grunnen. Derfor er det viktig at knutepunktene har seige bruddforløp, som oppnås ved at stålet er den dimensjonerende faktor.

Det er prinsipielt riktig at knutepunktene ikke skal være de svakestest leddene i konstruksjonen. Lastfaktorene for dimensjonering av knutepunktet bør derfor være noe større enn for hovedkomponentene.

Ved skjær-friksjon forutsetter man at betongen sprekker på den ugunstigste måte, og armering legges inn for å hindre den tenkte sprekken i å skape problemer. Ved en prøvebelastning behøver den tenkte sprekke ikke oppstå. Sammenføyningsdetaljen vil da være sterkere enn beregningene indikerer. Alle konstruktører har vel oppdaget at sprekker kan oppstå på de mest uforutsatte steder, og det er derfor viktig å ta hensyn til dette. Metoden gir svar på hvilken minimumstyrke som kan overføres.

Metoden er basert på at skjærkraften overføres ved hjelp av friksjon. Den ble først brukt ved dimensjonering av samvirkende konstruksjoner (composite structures), men forsøk har vist at dimensjoneringsmetoden egner seg utmerket i mange andre tilfeller også. Det bør nevnes at dimensjonering etter skjær-friksjonsmetoden refererer seg til bruddstadiet.

## Skjær-friksjonshypotesen

Vi forutsetter at en betongkonstruksjon har en sprekke som vist på Fig. 1. Skjærkraften  $V$  vil prøve å forskyve de to halvdelene i forhold til hverandre. Når  $V$  prøver å forskyve de to delene i forhold til hverandre, vil de på grunn av

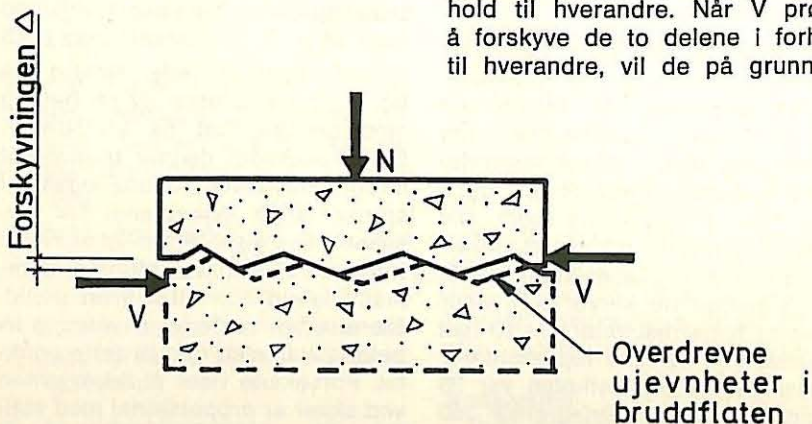


Fig. 1



ujevnhetene forskyve seg en liten distanse,  $\Delta$ , som motvirkes av friksjonskraften  $\mu N$ . Dersom armeringen står vinkelrett på sprekken, vil det oppstå en strekkraft i stålet, som klemmer delene sammen med en kraft tilsvarende strekket i armeringen. Maksimal utnyttelse av stålet vil vi få dersom sprekkebredden blir så stor at stålet flyter. Maksimal skjærkraft vil derfor bli:

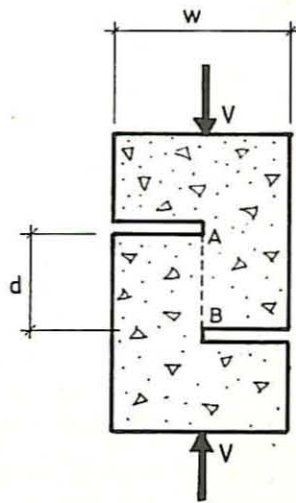
$$V_{\max} = A_s \cdot f_y \cdot \mu$$

Denne hypotesen kalles skjærfriksjonshypotesen. Mast [1] har vist at en sprekkebredde på 0,25 mm er tilstrekkelig til at stål med flytegrense mellom 350 og 400 N/mm<sup>2</sup> skal begynne å flyte, og denne sprekkebredden vil bestandig oppstå i et skjærbrudd av denne typen. Ligning (1) kan også brukes når sprekken oppstår mellom glatte betongflater og mellom stål og betong. Det eneste som varierer her, vil være friksjonskoeffisienten. Det nye med denne teorien, er at skjærmotstanden skyldes friksjon og ikke heft, og at armeringen som går vinkelrett på bruddet, er belastet med strekk. Vi må derfor være omhyggelige med forankring av armeringen på begge sider av det potensielle bruddstedet. Flere forsøk har vist at en så enkel tankegang kan brukes for flere typer konstruksjoner som er utsatt for store skjærkrefter og der bøyepeningene er ubetydelige, f. eks. konsoller, bjelke-ender og søylehoder.

Referansene [1], [2], [3], [4], [5] omtaler forsøk som er utført i USA for å kontrollere teorien. Beregningsmetoden har den store fordel at den er enkel og gir god oversikt.

#### Laboratorieforsøk

Hofbeck [4] har gjort flere forsøk for å undersøke hvordan skjærkrefter overføres. Av resultatene kan vi trekke konklusjoner om skjærfriksjonshypotesens anvendelighet og dens begrensninger. Fig. 2 viser det prøvelegeme som ble brukt. Armeringen er plassert vinkelrett på den stiplede linjen A—B. Fig. 3 gjengir tre kurver som viser noen av hans resultater. De to helt opptrukke kurvene representerer prøver der betongfastheten var 35 N/mm<sup>2</sup> og stålets flytegrense 350 N/mm<sup>2</sup>. De verdier som er indikert med små sirkler, viser hvor-



Hofbecks prøvelegeme

Fig. 2

dan skjærkraften varierer med det totale strekk i armeringen ved brudd. Kurven er for enkelthets skyld tegnet på grunnlag av skjærspenning og  $p \cdot f_y$ . Skjærspenningen er her skjærkraften dividert med det totale betongareal, og  $p$  er stålarealet dividert med det totale betongareal. I den andre helt opptrykkede kurven er betong- og stål-kvalitetene de samme. Forskjellen er at denne kurven er resultatet av prøver som på forhånd hadde en sprekke langs skjærplanet (sprekk langs A—B i Fig. 2.) Vi ser at kurvene her er parallelle fra verdier for  $p \cdot f_y$  mellom 1,5 og 6,7 N/mm<sup>2</sup>. På dette stedet bøyer kurven for uoppsprukke prøver plutselig av, og følger samme kurve etter at  $p \cdot f_y$  er kommet opp i 9,5 N/mm<sup>2</sup>. Den stiplede kurven på fig. 3 gir kapasiteten av en betong med bruddfasthet på 20 N/mm<sup>2</sup>. Forsøkene som danner grunnlaget for denne kurven, hadde også en sprekke langs skjærplanet før forsøkene begynte. Vi ser at kurvene for de to betongkvalitetene er sammenfallende opp til et visst punkt. Bæreevnen er derfor uavhengig av betongkvaliteten opp til dette punktet. Forsøkene viser at bæreevnen ved skjær er proporsjonal med stålmengden og at totalt betongareal ikke spiller noen rolle. (Ved å gan-

ge  $v$  og  $p \cdot f_y$  i fig. 3 med betongarealet, får vi  $V$  og  $A_s \cdot f_y$ .)

Ved valg av riktig friksjonskoeffisient og konstant  $k$  kan kurven i fig. 3 uttrykkes som  $V = k + A_s \cdot f_y \cdot \mu$ . Vi ser her at forskjellen mellom denne ligningen og skjærfriksjonshypotesen er konstanten  $k$ . Vi kan derfor forutsette at skjærfriksjonshypotesen i prinsippet er riktig under forutsetning av visse begrensninger som vi skal komme tilbake til senere.  $k$  er avhengig av betongens skjærmotstand.

Hofbeck varierte  $p \cdot f_y$ -tallet på forskjellige måter for å se om det hadde noen innvirkning på resultatet. Det ble ikke prøvd armering med større diameter enn 16 mm. Det viste seg at skjærstyrken var uavhengig av om armeringen ble større eller mindre. Av andre er det blitt foreslått at armeringsdiameteren bør begrenses oppad til 20 mm for å sikre at bruddet bestandig blir som skjærfriksjonshypotesen forutsetter.

Hofbeck prøvde også stål med høyere flytegrense enn 350 — 400 N/mm<sup>2</sup>. Stål med flytegrense på 470 N/mm<sup>2</sup> gav bruddverdier for skjærspenningen som var høyere enn antatt. Dette kan forklares med at terskelen for flytning før herding inntreffer, blir kortere med økende flytegrense. Stål med høyere flytegrense enn 450-500 N/mm<sup>2</sup> bør ikke brukes. Hos slike kvaliteter vil stålet ikke flyte, og bruddet blir av en annen karakter enn forutsatt i skjærfriksjonshypotesen.

Armerings fordyblingseffekt ble også undersøkt ved å sette en gummistrømpe på den delen av armeringen som lå i og nær ved sprekken. Strømpe tillot 3 mm relativ forskyvning for armeringen ble belastet i ren skjær. Det viste seg at for de prøver som ikke hadde sprekke langs linjen A—B (fig. 2), betydde det lite. For de oppsprukke prøver betydde det en senkning av bruddlasten med 20 til 30 %.

#### Relasjonen mellom hypotese og forsøk.

Dersom ligningen  $V = k + A_s \cdot f_y \cdot \mu$  skal brukes, må vi kjenne  $k$  og  $\mu$  for forskjellige betongkvaliteter. Dette vil kreve mye utprøving siden  $\mu$  varierer med størrelsen av  $p \cdot f_y$  for samme betongkvalitet



(se fig. 3), og  $k$  varierer med betongkvalitetene. Denne enkle ligningen kan da til sine tider bli ganske innviklet. Dette kan vi unngå ved å bruke friksjonskoeffisienter som er større enn forsøkene tilsier og ikke har noen terskelverdi  $k$ .

Vi regner at hele skjærkraften opptas som friksjon, uavhengig av om betongkonstruksjonen er oppsprukket eller ikke. Dette er avhengig av at vi begrenser bruken oppad til en bestemt maksimumsgrense av  $p \cdot f_y$  og at vi bruker forskjellige verdier for  $\mu$  i de forskjellige tilfellene. Skjæringsfriksjonshypotesen gir konservative verdier ved å bruke de friksjonskoeffisienter som er gitt i tabell 1. Men bruken må begrenses oppad til de  $p \cdot f_y$ -tall som er lavest av 13% av betongens terningstyrke (i USA bruke 15% av sylindertyrken) og 4,5 N/mm<sup>2</sup>.

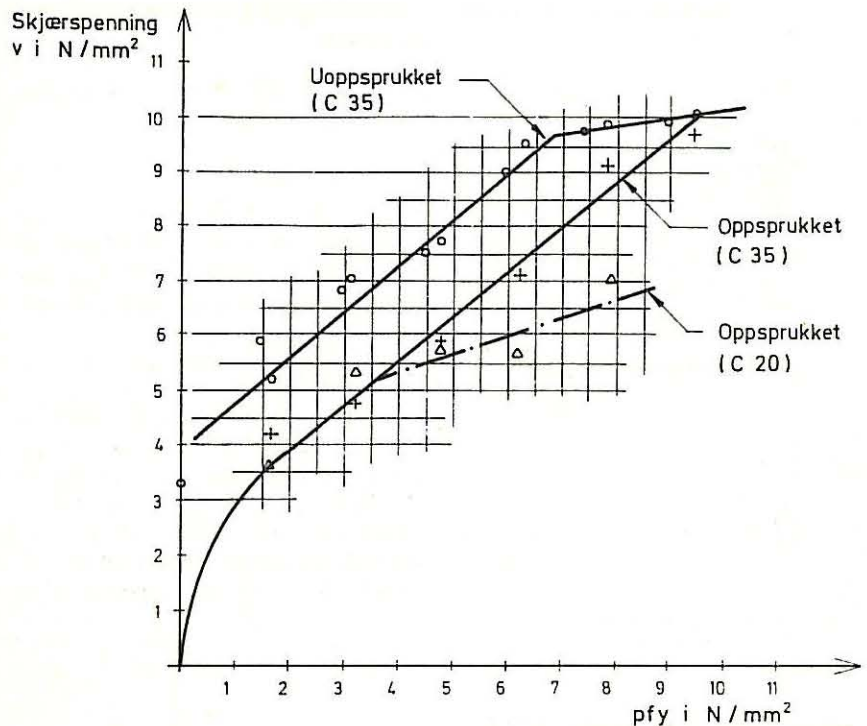
Tabell 1. Friksjonskoeffisienter for ulike forhold

Beskrivelse	Friksjonskoeffisient
Monolittisk konstruksjon	1,4
Betong mot betong, Ru kontaktflate	1,0
Betong mot stål. Skjærforbindere sveiset på byggeplass	0,7
Betong mot betong. Glatt kontaktflate	0,7

Hofbeck har, med utgangspunkt i sine forsøk, antydnet, at det i visse tilfeller vil være hensiktsmessig å bruke andre friksjonskoeffisienter enn dem som er gitt i tabellen. For å trekke fordel av armeringen ved sterkt belastede konstruksjoner, foreslås det at  $\mu = 1$  brukes (i stedet for 1,4).  $p \cdot f_y$ -tallet begrenses da oppad til den verdien som er minst av 26% av terningstyrken og 10,5 N/mm<sup>2</sup>.

Ved dimensjonering må en spesielt være oppmerksom på:

1. Skjær-friksjonshypotesen baserer seg på statiske belastninger ved brudd. I de tilfeller der utmatting er kritisk, eller hvor små deformasjoner ikke er ønskelige, bør skjær-friksjonshypotesen ikke brukes.
2. Dersom det finnes ytre strekkkrefter vinkelrett på bruddflaten, må det armeres spesielt for disse.



$f_{ck} = 33$  og  $21$  N/mm<sup>2</sup> (sylindertyrke på 2500 og 4000 psi)  
 $f_y = 350$  N/mm<sup>2</sup> (brukt stål med flytepunkt 48 og 50,7 ksi)

$$v = \text{skjærspenning} = \frac{V}{A_c} = \frac{V}{b \cdot d}$$

$$p = \frac{A_s}{A_c}$$

$A_s$  = stålarialet

$A_c$  = totalt areal

○ = oppsprukket med bruddfasthet på ca. 35 N/mm<sup>2</sup>

⊕ = oppsprukket med bruddfasthet på ca. 35 N/mm<sup>2</sup>

△ = oppsprukket med bruddfasthet på ca. 20 N/mm<sup>2</sup>

Resultater fra Hofbechs prøver.

Fig. 3

3. Armeringen må ha full forankring på begge sider av sprekken, og diameteren må ikke være større enn 20 mm.
4. Alle prøver er foretatt med betong fremstilt med vanlig tilslag. (Det er ikke foretatt forsøk med betong med lett tilslag).
5. Friksjonsvinkelen må være som gitt i tabell 1. Dette er under forutsetning av at  $p \cdot f_y$  (fig. 3) ikke er større enn 13% av terningstyrken eller maksimum 4,5 N/mm<sup>2</sup>.
6. Armeringsprosenten ( $p$ ) bør ikke være større enn 1%.

Dersom en betrakter en liten terning som ligger i planet A—B (fig. 2), vil den være utsatt for følgende spenninger:

$$v = \frac{V}{b \cdot d}$$

$$\sigma_x = p \cdot f_y$$

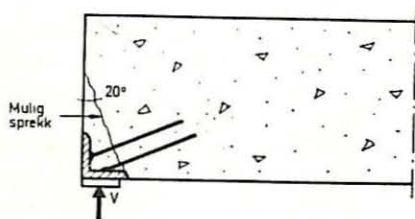
$$\sigma_y = \frac{V}{b \cdot w}$$

Ved å bruke disse spenningsrelasjonene og Zias bruddkriterium (4), vil en få tilnærmet samme resultat som det som er gitt i fig. 3 (for monolittiske konstruksjoner).

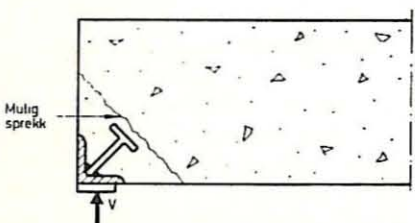
#### Konklusjon

Selv om metoden for å komme frem til forholdet mellom  $v$  og  $p \cdot f_y$ ,





Forsterkning av bjelkeende  
Riktig armering  
Fig 4 a



Forsterkning av bjelkeende  
Uheldig armeringsplasing  
Fig 4 b

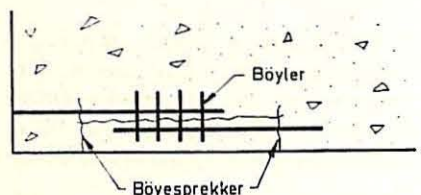
baserer seg på gjennomsnittlige spenninger og forenkla betraktninger, kan skjær-friksjonshypotesen benyttes for monolittiske og samvirkende konstruksjoner.

### Eksempler

A) Når hypotesen brukes på monolittiske konstruksjoner, må vi regne med at de sprekker opp i ugunstigste plan. Armeringen i dette planet må være tilstrekkelig lang slik at sprekkene ikke bare dannes rundt armeringen. Fig. 4 b viser en utførelse som av denne grunn er meget uheldig, mens utførelsen i fig. 4 a anbefales.

### Dimensjonering av vinkelforankringen i fig. 4 a

Dimensjonerende skjærkraft  $V = 350$  kN. Belastningen er bestemt ut fra NS 3052, Beregninger av Belastninger, foruten at belastningene er multiplisert med en faktor 1,2 for å sikre at det ikke er knutepunktet som er konstruksjonens svakeste punkt.



Skjøting av strekkarmering  
Fig. 5

Armeringsstålets dimensjonerende fasthet

$$f_s = \frac{f_y}{\gamma_m} = \frac{400}{1,25} = 320 \text{ N/mm}^2 \text{ (KS 40S)}$$

$$A_s = \frac{V}{f_s \cdot \mu} = \frac{350000}{320 \times 1}$$

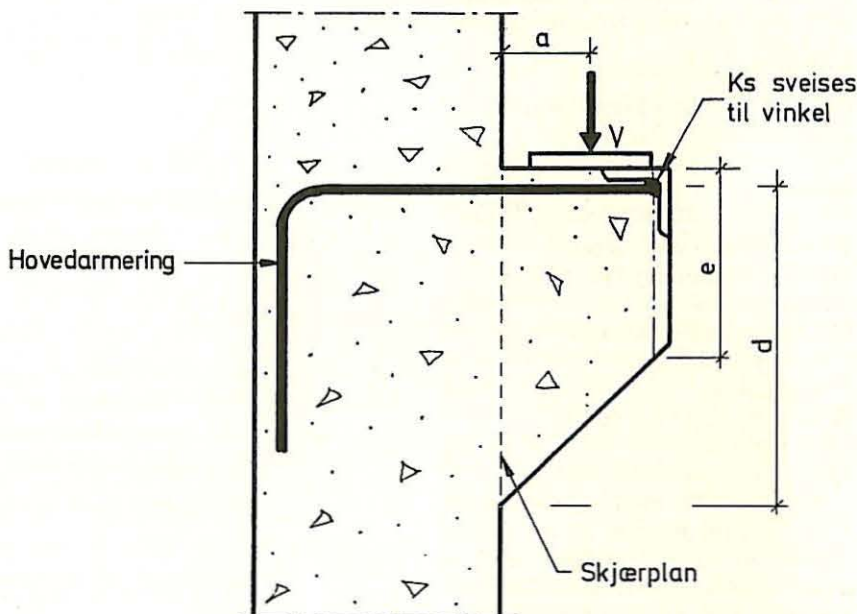
Verdien av  $\mu$  er 1 (forutsatt at  $p \cdot f_y$  ligger mellom 0,13  $f_{ck}$  og 0,26  $f_{ck}$  eller maks 10,5 N/mm<sup>2</sup>)

$$A_s = \frac{350000}{320} = 1100 \text{ mm}^2$$

$p \cdot f_y$  må så kontrolleres. Dersom den er mindre enn antatt må en  $\mu$  på 1,4 benyttes i stedet for 1. B) Skjøting av armeringsstål i strekksonen bør helst unngås, da det kan oppstå en horisontal sprekk mellom to vertikale bøyesprekker

ved dimensjonering av konsoller. Den nye amerikanske standarden [5] sier at konsoller kan beregnes etter skjær-friksjonshypotesen dersom  $a/d$  (fig. 6) er lik eller mindre enn 0,5 (Mast [1] sier at dette forholdet kan bli 0,7 før skråstrekk blir dimensjonerende).  $d$  er vanligvis den avstanden som er vist. Grunnen er at sprekkene vanligvis oppstår som vist på grunn av spenningskonsentrasjoner i hjørnet.  $d$  skal aldri heller være større enn to ganger  $e$ .

Bare hovedarmeringen, som er den armeringen som ligger nærmest toppflaten av konsollen (fig 6), skal tas med i beregningene. Resten av bøyelene regnes som uvirksomme. Men Kriz og Raths [6] har i sine forsøk vist at når konsol-



$e$  er konsollens høyde ved ytre kant av opplagret.

Konsoll

Fig. 6

(fig. 5). Ved å plassere bøyler vinkelrett på sprekkene kan den overføre strekkraften som friksjon.

Ett 12 mm KS 40 armeringsjern skal skjøtes.

Skjærkraften som skal overføres

$$V = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \times 400 = 45200 \text{ N}$$

$$A_s = \frac{V}{f_s \cdot \mu} = \frac{45200}{1,4 \times 320} = 100 \text{ mm}^2$$

C) Et av de viktigste bruksområdene for skjær-friksjonshypotesen er

len blir påvirket av bare vertikale og horisontale krefter, bør bare hovedarmeringen regnes som effektiv. Hovedarmeringen må da dimensjoneres på en slik måte at den direkte tar opp de horisontale kreftene. Den amerikanske standarden sier at det bestandig skal plasseres bøyler parallellt med hovedarmeringen. Disse skal ha et samlet tverrsnitt (fig. 7) som er halvparten av hovedarmeringens. Armeringsjernene skal plasseres i de øverste  $\frac{2}{3}$  av konsollens høyde.



### Dimensjonering av konsoll (fig. 7)

Dimensjonerende skjærkraft settes  $V = 550$  kN. Dersom søylen er stiv, blir konsollen utsatt for en horisontalkraft,  $H = V \cdot \mu$  når bjelken er utsatt for volumforandringer. Dersom stål er brukt som mellomlegg, er  $\mu = 0,7$  (Bestemt ved NBI. Koeffisienten er avhengig av normalkraftens og anleggsflaten størrelse og form).

$$H = 0,7 \times 550 = 385 \text{ kN}$$

En må som tidligere nevnt over regne at horisontalkraften direkte opptas av armeringen (fører med seg at normalkraften minskes).

$$V = \mu (A_s \cdot f_s - H)$$

$$550\,000 = 1,4 (A_s \cdot 320 - 385\,000)$$

$$A_s = 2\,000 \text{ mm}^2$$

Ved å introdusere en horisontalkraft blir hovedarmeringen i dette tilfellet fordoblet.

Bøylearmerings størrelse bør her være

$$\frac{2\,000}{2} = 1\,000 \text{ mm}^2$$

For å ta opp horisontalkraften må opplagerplaten festes direkte til hovedarmeringen. Dette kan gjøres ved at det ved nesene av konsollen legges inn en vinkel som igjen sveises til hovedarmeringen. Den virker da som forankring av hovedarmeringen (fig. 7.)

$$\rho = \frac{A_s}{b \cdot d} \quad \rho \cdot f_y = 4,5$$

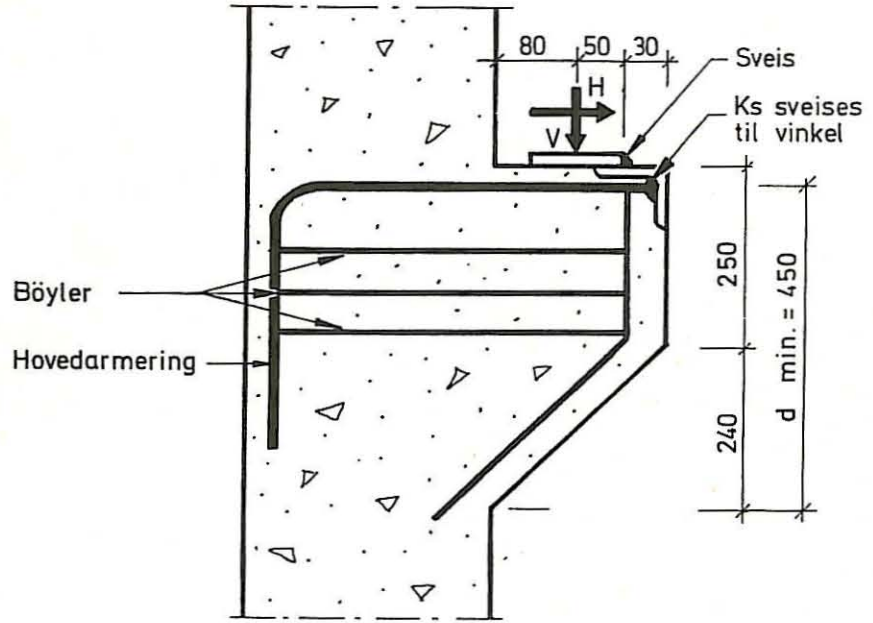
Dersom søylen er 400 mm bred, får vi:

$$\frac{2\,000}{400 \cdot d} = \frac{4,5}{400} \quad d = 445 \text{ mm}$$

$\frac{a}{d} \ll 0,5$  og skjær friksjonshypotesen er derfor gyldig.

### Tegnforklaring

- $A_c$  Totalt tverrsnittareal
- $A_s$  Areal av strekkarmering
- $D$  Diameter
- $V$  Skjærkraft
- $b$  Bredde av belastet flate
- $d$  Effektiv dybde/lengde av belastet flate
- $f_{ck}$  Betongens terningtrykkfasthet
- $f_s$  Dimensjonerende armeringsfasthet
- $f_y$  Nedre flytegrense
- $v$  Skjærspenning
- $\mu$  Friksjonskoeffisient



Vertikal- og horisontalkraft

Opplagsplattens størrelse er  $100 \times 400 \times 15$  Kamstål 40 er brukt

Forutsetter her at bøylerne har samme flytepunkt som hovedarmeringen ( $400 \text{ N/mm}^2$ )

Fig. 7

### Litteraturreferanser

- [1] Mast, Robert F. Auxiliary reinforcement in concrete connections. American Society of Civil Engineers. Structural Division. Journal, b.94, nr. ST6, 1968, s. 1485—1504.
- [2] Prestressed Concrete Institute. Committee on Connection Details. Summary of basic information on precast concrete connections. Prestressed Concrete Institute. Journal, b. 14, nr. 6, 1969 s. 14—59.
- [3] Birkeland, Philip W. og Birkeland, Halvard W. Connections in precast concrete construction. American Concrete Institute. Journal, nr. 3, mars 1966, s. 345—368.
- [4] Hofbeck, J.A. m.fl. Shear transfer in reinforced concrete. American Concrete Institute. Journal, nr. 2, februar 1969, s. 119—128.
- [5] American Concrete Institute. Proposed revision of ACI 318—63, building code requirements for reinforced concrete. American Concrete Institute. Journal, nr. 3, februar 1970, s. 77—186.
- [6] Kriz, L.B. og Raths, C.H. Connections in precast concrete structures; strength of corbels. Prestressed Concrete Institute. Journal, b. 10, nr. 1, 1965, s. 16—61.

