



# SINTEF RAPPORT

## SINTEF IKT

Postadresse: 7465 Trondheim  
Besøksadresse: Alfred Getz vei 1, NTNU  
7491 Trondheim  
Telefon: 73 59 30 48  
Telefaks: 73 59 29 71

Foretaksregisteret: NO 948 007 029 MVA

TITTEL

**Metoder for lokal data-assimilering relatert til varsling av turbulens ved flyplasser**

FORFATTER(E)

Torbjørn Utnes  
Karstein Sørli

OPPDRAKSGIVER(E)

Avinor

RAPPORTNR. SINTEF A7333	GRADERING Åpen	OPPDRAKSGIVERS REF. Erling Bergersen	
GRADER DENNE SIDE Åpen	ISBN 978-82-14-04400-3	PROSJEKTNR. 90A344	ANTALL SIDER OG BILAG 35
ELEKTRONISK ARKIVKODE forside_avinor1.doc	PROSJEKTLEDER (NAVN, SIGN.) Torbjørn Utnes <i>T. Utnes</i>	VERIFISERT AV (NAVN, SIGN.) For R. Bjørgan <i>Vilhelms Skjott</i>	
ARKIVKODE	DATO 2008-07-02	GODKJENT AV (NAVN, STILLING, SIGN.) Roger Bjørgan, forskningssjef	

### SAMMENDRAG

Rapporten inneholder beskrivelse av metoder for lokal data-assimilering relatert til varsling av turbulens ved flyplasser. Den inneholder beskrivelse av en metode for data-assimilering og testing av denne på en enkel geometri som representerer en symmetrisk fjelltopp ("Hunt-fjellet"). En relativt grovmasket grid-oppløsning er valgt, men god nok til å representere hovedstrukturen i strømmingen. Alle beregningene er gjennomført for nøytral strømming, d.v.s. uten stratifikasjon.

Det spesielle med lokal data-assimilering er at området er relativt lite, slik at transporttiden gjennom området blir kort ved sterk vind. Dette gjør at randbetingelser blir viktigere enn initialbetingelser, og konvensjonelle assimilasjons-metoder er derfor mindre egnet. Et karaktertrekk ved lokal data-assimilering er relativt få datapunkter i de fleste tilfeller. Med bakgrunn i denne typen vurderinger har vi valgt å teste en formulering basert på forenklet *3d-Var*, og gjennomført noen elementære numeriske testsimuleringer. En konklusjon fra denne analyse er at "korreksjon av randbetingelser i prediksjonsintervallet" er et hovedproblem for en effektiv bruk av lokal data-assimilering.

På bakgrunn av konklusjonen ovenfor og i tråd med ideen fra *4d-Var* benytter vi derfor et tidsvindu for å analysere trenden i avvik mellom data og tidligere prediksjon. Dette kan så benyttes i den videre korreksjon av randbetingelsene i prediksjonsperioden. Rapporten inneholder beskrivelse av en type *tidsvariasjonsmetode* og en analyse av denne, samt testing av metoden på noen stiliserte eksempler. Dette arbeidet vil bli videreført og tenkes generalisert for utprøving i mer realistiske situasjoner.

STIKKORD	NORSK	ENGELSK
GRUPPE 1		
GRUPPE 2		
EGENVALGTE		

# Innhold

<b>1</b>	<b>Innledning</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Problemstilling</b>	<b>2</b>
<b>3</b>	<b>Lokal data-assimilering</b>	<b>3</b>
<b>4</b>	<b>Invers problemstilling</b>	<b>6</b>
4.1	Invers løsning basert på observasjonsdata . . . . .	6
4.2	Invers løsning basert på forenklet 3d-Var . . . . .	8
<b>5</b>	<b>Varsling basert på forenklet 3d-Var</b>	<b>10</b>
<b>6</b>	<b>Variasjonsmetode for estimering av startbetingelse og tidsvarierende randbetingelser</b>	<b>12</b>
6.1	Analyse i forkant av prediksjon . . . . .	12
6.1.1	Eksempel med sinusformet bakgrunnsløsning og en ikke-systematisk amplitudefeil . . . . .	13
6.1.2	Eksempel med sinusformet bakgrunnsløsning og en systematisk faseforskyvning . . . . .	14
6.1.3	Hvor mange målinger trengs? Bakgrunnsløsning med både fase- og amplitudefeil . . . . .	15
6.1.4	Eksempel med sinusformet bakgrunnsløsning med variabel amplitude og systematisk fasefeil . . . . .	16
6.1.5	Lineær, kvadratisk og kubisk influens-profil . . . . .	16
6.2	Ekstrapolering av analysekurven inn i prediksjonsintervallet . . . . .	17
	<b>Referanser</b>	<b>26</b>
<b>A</b>	<b>Forenklet 3d-Var: Lokal data-assimilering</b>	<b>27</b>
A.1	Generell kostfunksjon . . . . .	27
A.2	Eksempel med ett observasjonspunkt . . . . .	27
A.2.1	Fordeling av høyde-korreksjon . . . . .	28
A.3	Tidsfaktoren ved korreksjon av randverdier . . . . .	29
	<b>Referanser</b>	<b>29</b>
<b>B</b>	<b>Sensitivitetsanalyse - forenklet 2D-analyse</b>	<b>30</b>
B.1	Navier-Stokes ligninger for plan strømming . . . . .	30
B.2	Førsteordens sensitivitetsligninger for $c$ . . . . .	32
B.2.1	Iterasjon . . . . .	33

# 1 Innledning

Problemet med bruk av data-assimilering i modellsimulering kan sees som todelt: Et *invers* problem hvor observasjonsdata benyttes alene eller sammen med en bakgrunnsløsning for å rekonstruere initial- og randbetingelser, og et varslings/prediksjonsproblem hvor observasjonsdata bare er kjent i starten, men bakgrunnsløsningen kan være gitt også i varslingsintervallet.

Det spesielle med lokal data-assimilering er at området er relativt lite, slik at transporttiden gjennom området blir kort ved sterk vind. Dette gjør at randbetingelser blir relativt viktigere enn initialbetingelser, og konvensjonelle assimilasjons-metoder er mindre egnet. Et tilleggsmoment ved lokal data-assimilering er relativt få data-punkter i de fleste tilfeller. Med bakgrunn i denne typen vurderinger har vi valgt å teste en formulering basert på forenklet 3d-Var, og gjennomført noen elementære numeriske testsimuleringer.

En konklusjon fra denne analysen er at *korreksjon av randbetingelser i prediksjonsintervallet* er et hovedproblem for en effektiv bruk av lokal data-assimilering. I tråd med ideen fra 4d-Var kan man benytte et tidsvindu for å analysere trenden i avvik mellom data og tidligere prediksjon. Dette kan så benyttes i den videre korreksjonen av randbetingelsene i prediksjonsperioden. Rapporten inneholder en analyse av slike vurderinger, inkludert noen stiliserte testeksempler. Dette arbeidet tenkes generalisert for testing i mer realistiske situasjoner.

## 2 Problemstilling

Vi benytter en enkel tre-dimensjonal geometri som representerer en symmetrisk fjelltopp (Hunt & Snyder 1980). Det er valgt en relativt grovmasket gridoppløsning (40 x 40 x 35), men god nok til å representere hovedstrukturen i strømmingen, og beregningene er gjort med den serielle versjonen av SIMRA. Alle beregningene er gjennomført for nøytral strømning (uten stratifikasjon). For den aktuelle testingen antas følgende størrelser for geometri og vindstyrke:

$$\begin{aligned} \text{Fjellhøyde} \quad H &= 500 \text{ m} \\ \text{Høydevind} \quad U_\infty &= 20 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Vindretningen antas å variere sinus-formet med en tilleggsforstyrrelse som gir inhomogen fristrømning med vindskjær. Hovedretningen ligger i området mellom sør-vestlig og nord-vestlig, og perioden på dreiningen er 3 timer, noe som også tilsvarer hele prediksjonsperioden. Med gitt hastighetsamplitude  $u_a$  gir dette følgende vindfelt i uforstyrret del av feltet (dvs. høydevind og randverdier langt borte fra fjellet):

$$u = u_a \cos \theta; \quad v = u_a \sin \theta \quad (1)$$

hvor retningen er

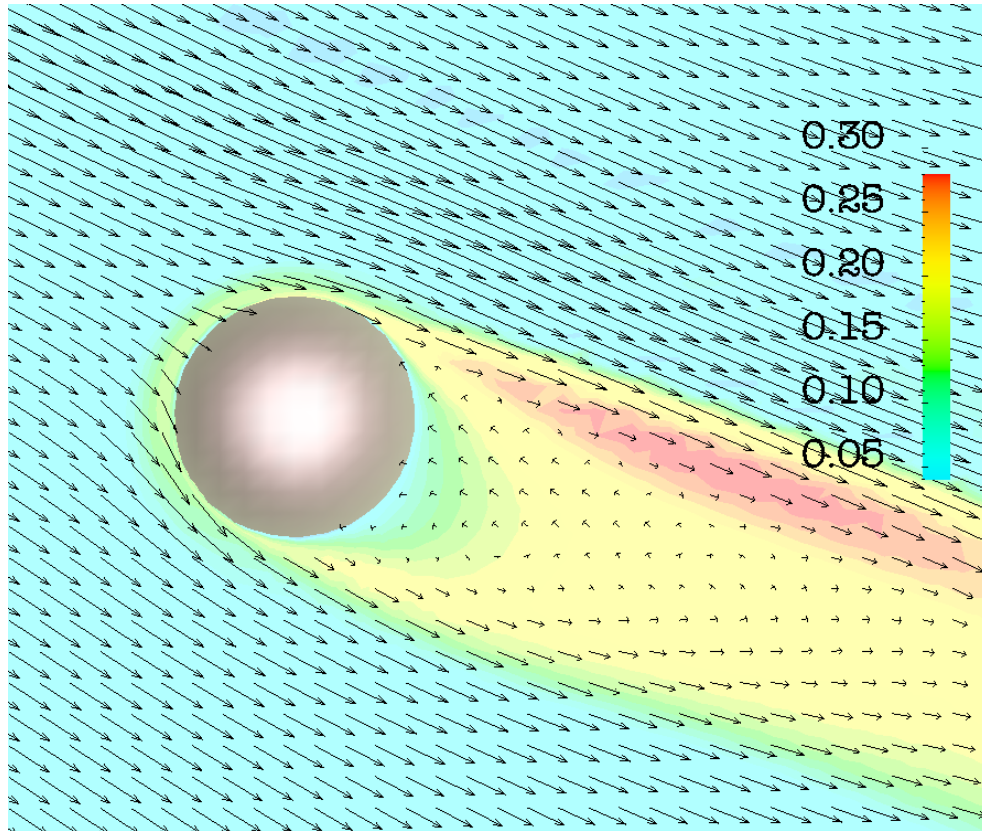
$$\theta = (\pi/4) \sin \omega t + 0.01(\epsilon_x + \epsilon_y), \quad (2)$$

frekvensen  $\omega = 2\pi/T$ , og perturbasjonen  $(\epsilon_x, \epsilon_y)$  er proporsjonal med hhv. koordinatene i de to horisontale retningene. Hastighetsamplituden langs innløpsrendene antas å variere logaritmisk med høyden:

$$u_a(z) = \min \left( U_\infty, \frac{u_*}{0.4} \ln \frac{z}{z_o} \right) \quad (3)$$

Her representerer  $u_*$  friksjonshastighet og  $z_o$  overflateruhet. Perioden på vindepisoden er

$$T = 3 \text{ timer} = 10800 \text{ s}$$



Figur 1: Øyeblikksbilde av roterende vind- og turbulensfelt. Rotasjonsretningen for fristrømningen er fra nordvestlig til sørvestlig vind. Horisontalsnitt i  $z = 0.4 H$  over bakken.

### 3 Lokal data-assimilering

I det følgende gjennomføres simuleringstester for å undersøke en enkel form for lokal data-assimilering. Globale størrelser som inngår er:

Eksakt løsning:  $\mathbf{x}_t$   
Observasjonsverdier:  $\mathbf{y}$   
Bakgrunnsløsning:  $\mathbf{x}_b$   
Analyse-løsning:  $\mathbf{x}_a$

Problemstillingen er nå følgende: Vi antar at en bakgrunnsløsning  $\mathbf{x}_b$  gitt, og søker å korrigere den vha observasjonsdata  $\mathbf{y}$ , slik at den korrigerte løsningen  $\mathbf{x}_a$  ligger så nær den eksakte løsningen  $\mathbf{x}_t$  som mulig.

I de numeriske eksperimentene antas den 'eksakte' løsningen  $\mathbf{x}_t$  å være lik løsning av RANS-modellen (SIMRA) med bruk av initial- og randbetingelser spesifisert fra ligningene (1-3) foran. Figur 1 illustrerer denne løsningen for et tidspunkt hvor høydevinden ligger i sørvestlig retning, og er iferd med å dreie mot sørlig retning. Hele simulerings-syklusen er også dokumentert som animasjon.

Bakgrunnsløsningen  $\mathbf{x}_b$  beregnes her som en perturbasjon av  $\mathbf{x}_t$ : Vi har valgt en tilfeldig løsning med fase-forsinkelse på 15 min og et noe mindre utsving sammenlignet med  $\mathbf{x}_t$ . Forskjellen mellom de to løsningene indikeres i figur 2, som viser beregnede høydeverdier for  $\mathbf{x}_t$  og  $\mathbf{x}_b$  i høydepunktet (3.2, 0.0, 2.2)h.

Fra fysiske vurderinger antas at det primært er *høydedata* som er interessant for bruk i den lokale data-assimileringen. Den enkleste tilnærmingen er da å anta at vi har bare ett observasjonspunkt (f.eks. fra fly på vei mot landing), eventuelt noen få observasjoner som slås sammen. I disse eksperimentene velges et observasjonspunkt som ligger i et uforstyrret område over fjelltoppen, med koordinatverdier

$$(x, y, z) = (3.2, 0.0, 2.2)h.$$

Fra dette observasjonspunktet tas det ut data fra den eksakte løsningen  $\mathbf{x}_t$ , dvs. en tidsserie av data for hastighetsfeltet i dette punktet, og dette gir dermed observasjonsvektoren  $\mathbf{y}$ .

For å estimere en korrigert løsning benytter vi en forenklet versjon av variasjonsformuleringen 3d-Var, med bruk av bare ett observasjonspunkt. Dette gir følgende korrigerede løsning eller analyse-løsning (se Appendiks):

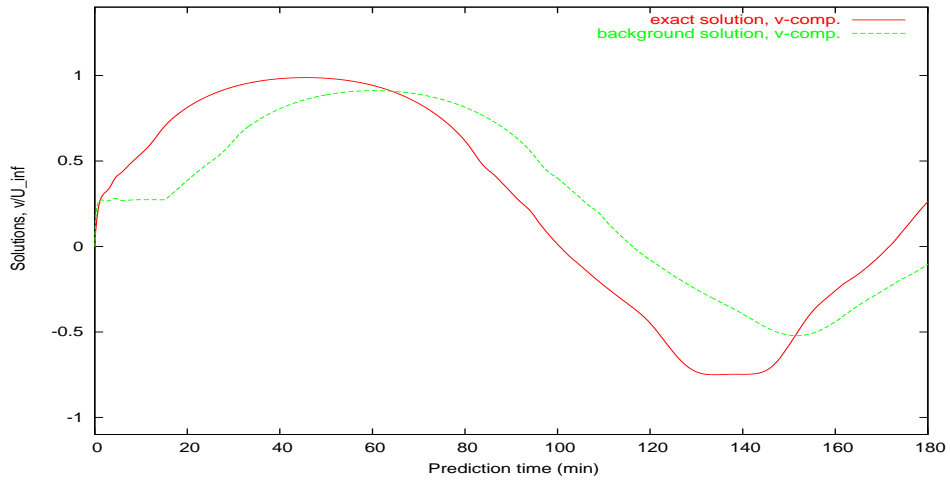
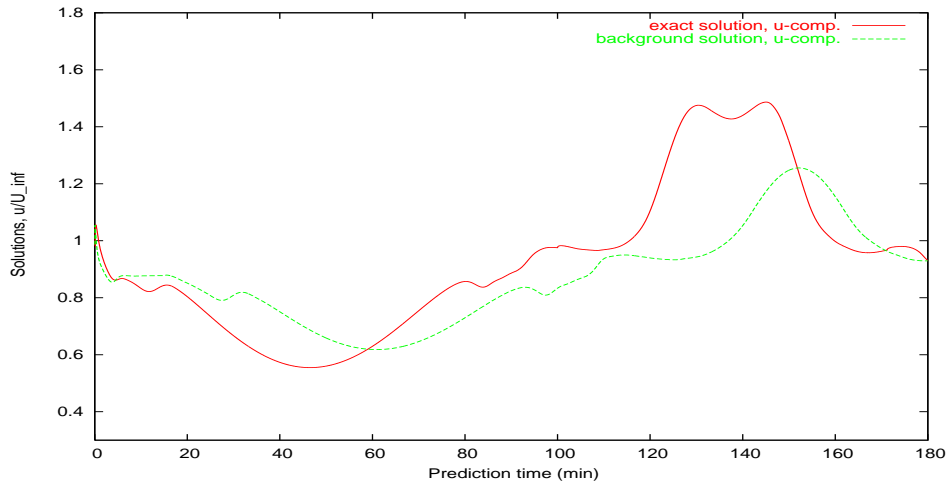
$$\mathbf{x}_a = \mathbf{x}_b + \frac{\mathbf{y}_k - \mathbf{x}_{b,k}}{\sigma_b^2 + \sigma_o^2} [B_{1k}, B_{2k}, \dots, B_{Nk}]^T \quad (4)$$

hvor  $\sigma_b$  representerer en bakgrunns-kovarians og  $\mathbf{y}_k$  er observasjonsdata i gridpunkt 'k'. Vi antar i tillegg at høydedata sprer informasjon tilnærmet uniformt i samme høyde i et lokalt område. Dermed kan den korrigerede løsningen forenkles til formen

$$\mathbf{x}_a = \mathbf{x}_b + (\mathbf{y}_k - \mathbf{x}_{b,k}) f(z/H) \frac{\sigma_b^2}{\sigma_b^2 + \sigma_o^2} [1, 1, \dots, 1_h]^T \quad (5)$$

hvor  $f(z/H)$  er en antatt vertikal fordeling (jfr. Appendiks).

Et hovedpunkt ved lokal data-assimilering er at randbetingelsene er relativt mye viktigere enn initialbetingelsene. Typisk tar det bare 10 - 20 min. før en partikkel transporteres gjennom hele det lokale området, og 'hukommelsen' om det opprinnelige initialfeltet er like kort. Derimot styrer randbetingelsene løsningen gjennom hele prediksjonsperioden. Problemet blir da hvordan vi kan korrigere randbetingelsene i selve varslingsintervallet. Formuleringen ovenfor (og alle klassiske assimilering-formuleringer) gjelder i prinsippet bare for et starttidspunkt, og vi er dermed foreløpig henvist til grove antakelser, jfr. seksjon 5 for et numerisk eksperiment.



Figur 2: Bakgrunnsløsning  $\mathbf{x}_b$  og eksakt løsning  $\mathbf{x}_t$ . Hastighetskomponenter i høydepkt. (3.2,0.0,2.2) som funksjon av varslingstid.

## 4 Invers problemstilling

Som et første punkt i analysen ser vi på følgende problem: Anta at observasjonsdata i et høydepunkt er kjent for hele tidsperioden som skal simuleres, sammen med bakgrunnsløsningen. Vi glemmer initial- og randbetingelsene for den eksakte løsningen, og konstruerer tilnærmete betingelser vha bakgrunnsløsningen og observasjonsdataene.

Denne problemstillingen skiller seg fra situasjonen med varsling/prediksjon ved at vi her antar at observasjonsdata er gitt for hele tidsperioden, mens dette naturligvis ikke er tilfelle i en varslingssituasjon, hvor slike data bare er gitt fram mot tidspunktet hvor varslingen begynner.

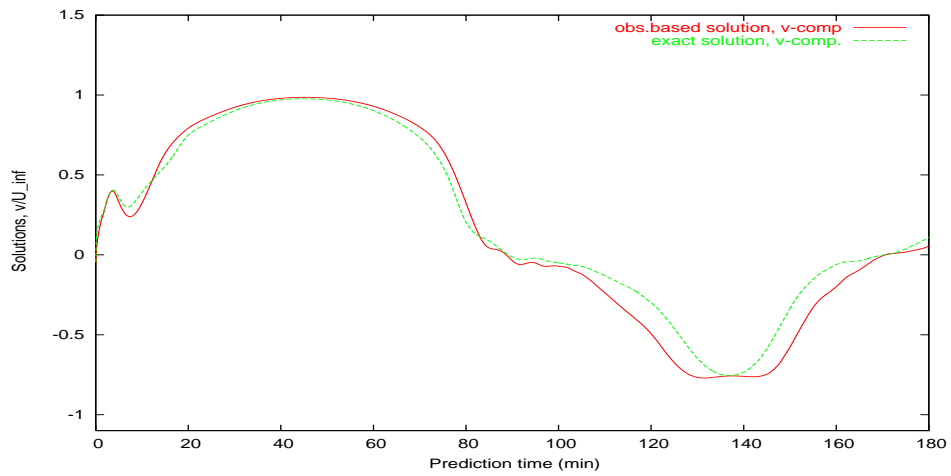
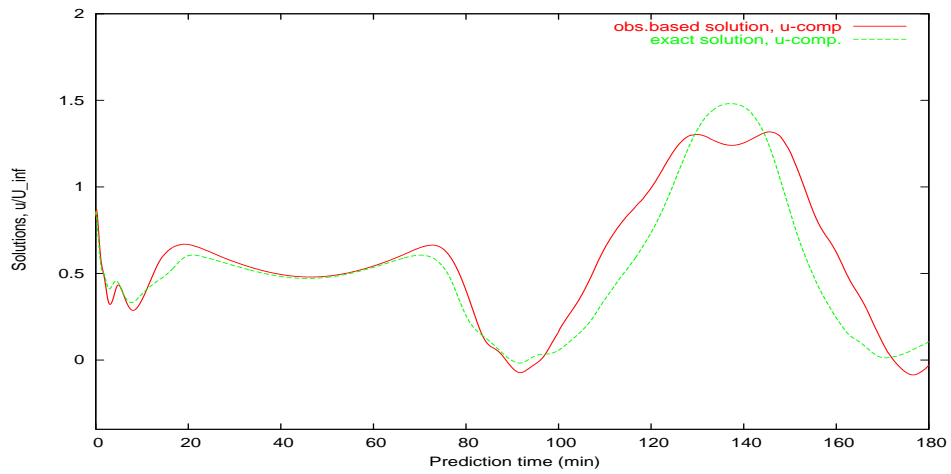
### 4.1 Invers løsning basert på observasjonsdata

I dette tilfellet legges all vekt på observasjonsdata når vi skal konstruere initial- og randbetingelser, og bakgrunnsløsningen neglisjeres. Vi antar altså at observasjonsdata er tilgjengelig for hele simuleringsperioden. I stedet for ligning (5) fås dermed følgende relasjon for initial- og randbetingelser:

$$\mathbf{x}_a = \mathbf{y}_k f(z/H)[1, 1, \dots, 1_h]^T$$

Initial- og randverdier i samme høydenivå som observasjonspunktet 'k' får uniformt samme verdi, mens den vertikale fordelingen  $f(z/H)$  antas logaritmisk.

Figur 3 illustrerer denne løsningen i et kontrollpunktet (2.2 h, 0.4 h, 0.4 h), og viser rimelig overensstemmelse med den eksakte løsningen som også er inkludert i figuren. Inhomogeniteten i høydevinden for den 'eksakte' løsningen er den viktigste årsaken til forskjellen mellom disse løsningene. (Tilsvarende beregninger med en uniform, homogen høydevind gir løsninger som ligger betydelig nærmere hverandre.)



Figur 3: Sammenligning mellom løsning basert på observasjonsdata  $\mathbf{x}_a$  og eksakt løsning  $\mathbf{x}_t$ . Hastighetskomponenter i kontrollpkt (2.2,0.4,0.4) som funksjon av tid.



## 4.2 Invers løsning basert på forenklet 3d-Var

I dette tilfellet må vi anta noe om forholdet  $\sigma_b/\sigma_o$ , dvs. forholdet mellom standardavvik (eller varians) for hhv. bakgrunnsløsning og observasjonsdata. Altså gjøre en antakelse om hvor stor vekt vi vil legge på observasjonsdata sammenlignet med bakgrunnsløsningen, og observasjonsdata antas gitt for hele simuleringsperioden. Dersom all vekt legges på observasjonsdata, blir løsningen som gitt i forrige avsnitt. Dersom all vekt legges på bakgrunnsløsningen, er løsningen gitt av  $\mathbf{x}_b$  (jfr. fig. 2).

Her velger vi å legge samme vekt på bakgrunnsløsning og observasjonsdata, samtidig som den vertikale fordelingen av korreksjonen velges logaritmisk som tidligere. Initial- og randbetingelser er da gitt fra (5) på formen

$$\mathbf{x}_a = \mathbf{x}_b + \frac{1}{2}(\mathbf{y}_k - \mathbf{x}_{b,k})f(z/H)[1, 1, \dots, 1_h]^T$$

Det bør merkes at vi her også har valgt å beholde samme vekt på beregning av randbetingelsene over hele prediksjonsperioden. Dette er opplagt et åpent spørsmål, men i dette spesielle tilfellet har vi ingen tilleggsopplysninger som kan gi andre preferanser. Med antatt samme vertikale fordeling for  $\mathbf{x}_a$ ,  $\mathbf{x}_b$  og  $\mathbf{y}_k$ , gir dette følgende for høydenivå-verdier (markert med  $\hat{\mathbf{x}}$ ):

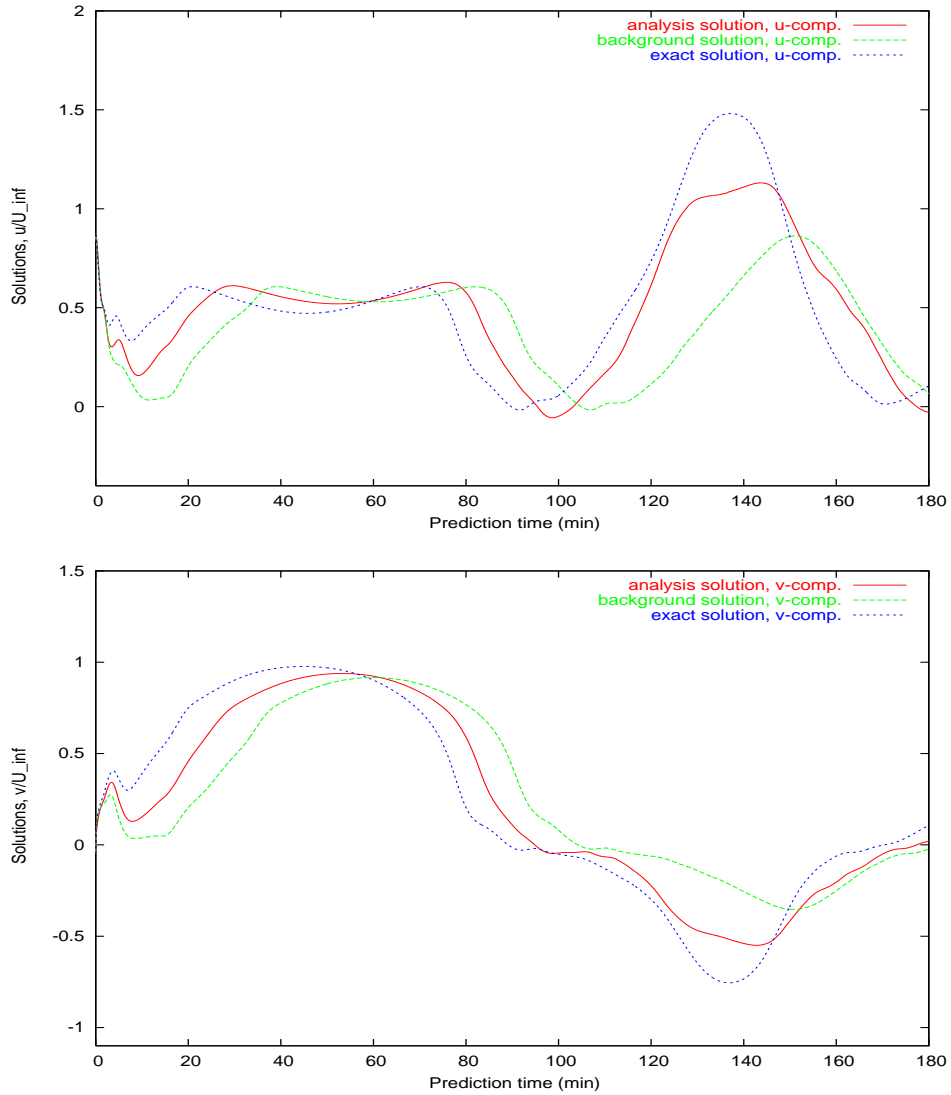
$$\hat{\mathbf{x}}_a = \hat{\mathbf{x}}_b + \frac{1}{2}(\mathbf{y}_k - \hat{\mathbf{x}}_{b,k})[1, 1, \dots, 1_h]^T$$

Dersom  $\hat{\mathbf{x}}_b$  er uniformt fordelt, forenkles denne relasjonen til

$$\hat{\mathbf{x}}_a = \frac{1}{2}(\mathbf{y}_k + \hat{\mathbf{x}}_b)$$

Man kan naturligvis også justere vektforholdet  $\sigma_b/\sigma_o$  slik at denne relasjonen oppnås selv med ikke-uniform fordeling av  $(\hat{\mathbf{x}}_a, \hat{\mathbf{x}}_b)$ .

Figur 4 viser den resulterede analyse-løsningen med bruk av sistnevnte uttrykk. Analyse-løsningen ligger omtrent midt mellom eksakt og bakgrunnsløsning, og er derfor en klar forbedring av bakgrunnsløsningen.



Figur 4: Sammenligning mellom analyse-løsning  $\mathbf{x}_a$ , bakgrunnsløsning  $\mathbf{x}_b$  og eksakt løsning  $\mathbf{x}_t$ . Hastighetskomponenter i kontrollpkt. (2.2,0.4,0.4) som funksjon av tid.

## 5 Varsling basert på forenklet 3d-Var

I dette tilfellet er observasjonsdata bare kjent inntil starten av simuleringen, og problemet er som tidligere nevnt hvordan vi kan benytte denne kunnskapen til å forbedre varslingen. Den klassiske situasjonen er klar nok, vi kan korrigere initialfeltet vha en metodikk som den vi allerede har vist i det foregående. Spørsmålet er så hvordan randbetingelsene skal korrigeres framover i tid.

Vi tar utgangspunkt i relasjonen (5):

$$\mathbf{x}_a = \mathbf{x}_b + (\mathbf{y}_k - \mathbf{x}_{b,k})f(z/H)\frac{\sigma_b^2}{\sigma_b^2 + \sigma_o^2}[1, 1, \dots, 1_h]^T \quad (6)$$

Korreksjonsleddet

$$\Delta_k = \mathbf{y}_k - \mathbf{x}_{b,k}$$

er generelt tidsavhengig, men problemet nå er at observasjonsdata  $\mathbf{y}_k$  ikke kan være kjent før varslingsperioden!

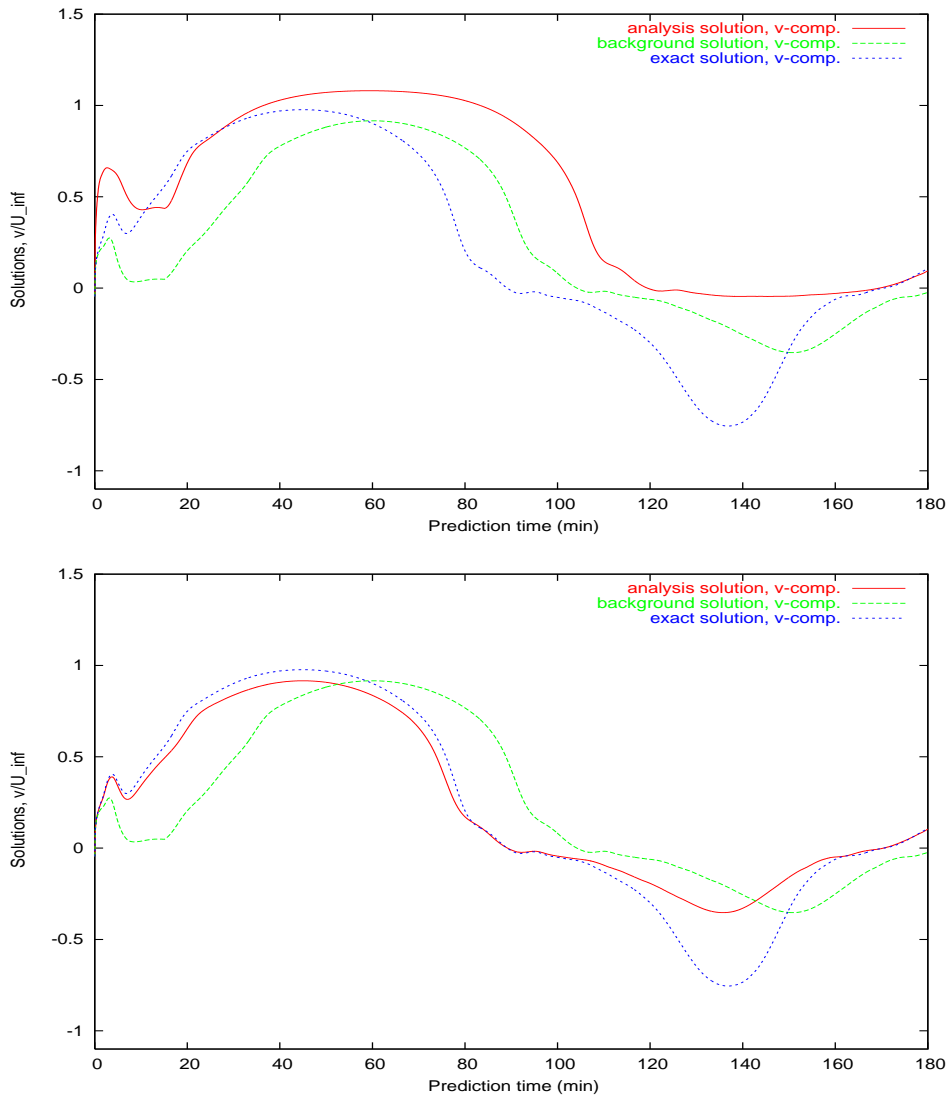
For å illustrere problemet har vi gjennomført to forskjellige typer korreksjoner, begge så enkle som mulig: Vi korrigerer bare det som har å gjøre med vindretning, og beholder alt annet fra bakgrunnsløsningen. Korreksjonen holdes konstant gjennom hele varslingsperioden. I begge tilfeller antas at den reelle varslingsperioden starter fra tidspunkt  $t = 20$  min., hvor nyeste data er kjent. (De første 20 min. kan her betraktes som en initialiseringsfase.)

- (1) Her benyttes den korreksjonen som kan måles i starttidspunktet  $t = 20$  min. I vårt tilfelle tilsvarer det en dreining  $\Delta\theta \approx 20$  grader mellom observasjon og bakgrunnsløsning i høydepunkt 'k'.
- (2) Her antas at vi over tidsintervallet  $0 \leq t \leq 20$  har observert en faseforskyvning i tid på 20 min., og innfører en tilsvarende korreksjon.

Resultatene av disse korreksjonene er vist i figur 5 sammen med bakgrunnsløsningen og den eksakte løsningen. Det er klart at korreksjonen (1) har vært mislykket i dette tilfelle, mens korreksjon (2) gir en gevinst (som ventet ut fra vår forhåndskunnskap).

Fra dette kan vi konkludere at **korreksjon av randbetingelser i varslingsintervallet** er hovedproblemet for en effektiv bruk av lokal data-assimilering. Eksempel (1) ovenfor illustrerer at en konstant korreksjon basert på data ved et enkelt tidspunkt kan være risikabelt. Eksempel (2) viser derimot at mer relevant informasjon kan fås ved bruk av et tidsvindu forut for varslingsperioden. Dette indikerer at en metodikk basert på analyse av forutgående trend i observasjonsdata (over et tidsintervall) er interessant i fortsettelsen av denne problematikken.

Transport-tiden gjennom det lokale området er så kort at vi ikke vil ha nok flydata i løpet av denne tiden til å kunne benytte 4d-var. Men en mulig tilnærming kan være å benytte en variasjons-formulering basert på data og bakgrunnsløsningen over siste varslingsperiode, og bruke dette som korreksjon. En slik metode analyseres nærmere i neste seksjon.



Figur 5: Sammenligning mellom eksakt løsning  $\mathbf{x}_t$ , bakgrunnsløsning  $\mathbf{x}_b$  og to analyseløsninger i kontrollpkt. (2.2,0.4,0.4) for en hastighetskomponent. Øverst: Korreksjon basert på forskjell i vindretninger på tidspunkt  $t = 20$  min. Nederst: Korreksjon basert på faseforskyvning i tid.

## 6 Variasjonsmetode for estimering av startbetingelse og tidsvarierende randbetingelser

Et hovedproblem hva angår lokal værvarsling og data-assimilering er å bestemme et godt estimat av startbetingelse og randbetingelser for det tidsintervallet vi betrakter, som typisk er 2-3 timer. For lokal varsling er randbetingelser spesielt viktig fordi endring av disse i prediksjonsintervallet ofte forplanter seg til hele området i samme tidsintervall. Utgangspunktet er at vi kun har målinger fram til starttidspunktet for dette tidsintervallet. Derimot har vi en bakgrunnsløsning (fra en 'grovere' og større modell) for det aktuelle tidsintervallet. Vår antagelse er at det sannsynligvis vil være fordelaktig å benytte målinger (f.eks. fra fly) i forkant av dette starttidspunktet for derved å kunne ekstrahere eventuelle karakteristikk som bakgrunnsløsningen har i forkant av starttidspunktet. Dette kan f.eks. være systematiske feil som faseforskyvning og amplitudedempning. Det vil da være rimelig å anta at bakgrunnsløsningen fortsetter å ha en slik karakter for prediksjonsintervallet også. Vi setter oss derfor som mål å tilpasse en 'analyse' i et tidsintervall i forkant av prediksjonsintervallet basert på tilgjengelige målinger og bakgrunnsløsning for derved å ekstrapolere forskjellsforløpet mellom bakgrunnsløsning og analyseløsning inn i prediksjonsintervallet.

### 6.1 Analyse i forkant av prediksjon

En vanlig måte å bestemme en kurvetilpasning for et gitt datasett er gjennom bruk av en eller annen form for 'minste kvadraters tilpasning' og antagelse av en polynomisk kurveform med gitt grad. I vårt tilfelle består datasettet av både målinger og verdier fra en bakgrunnsløsning. Imidlertid er det vanskelig å utsi noe om kurveformen på forhånd. For å bestemme et veiet middel mellom bakgrunnsløsning og måledata benytter vi derfor istedet en variasjonsmetode. Viser til [2] og referansene her. Den er gitt ved en 'kostfunksjon'

$$J(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_b)^T \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_b) + \frac{1}{2}(\mathbf{H}\mathbf{x} - \mathbf{y})^T \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{H}\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (7)$$

med to begrensninger som representerer h.h.v. bakgrunnsløsning og måledata. Målet vårt er å minimere  $J(\mathbf{x})$ . Den  $\mathbf{x}$  som gjør det kaller vi 'analyseløsningen' og benevner vi  $\mathbf{x}_a$ . I ligning (7) er  $\mathbf{x}_b$  bakgrunnsløsningen,  $\mathbf{B}$  er bakgrunnsløsningens kovariansmatrise,  $\mathbf{y}$  er måledatavektoren,  $\mathbf{H}$  er en 'avbildningsmatrise' som bringer  $\mathbf{x}$  over i måledataposisjon og  $\mathbf{R}$  er målingenes kovariansmatrise. Sistnevnte matrise kan antas å være en diagonalmatrise med konstant verdi  $\rho$  på diagonalen. Denne verdien sier noe om usikkerheten i målingene eller alternativt hvor mye vekt vi legger på målingene. Den andre kovariansmatrisen,  $\mathbf{B}$ , bestemmer hvordan målingene spres til nærtliggende (her i tid) punkter. Vi antar at  $\mathbf{B}$  er en symmetrisk båndmatrise med en gitt båndbredde som representeres ved en 'influensfaktor' *infl*. Verdiene i dette båndet lar vi først variere lineært mellom 1 og 0 fra diagonalelementet til ytterste element i båndet, på begge sider av diagonalen. Senere vil vi benytte andre influensprofil også (jfr. Figur 14). Vi antar at  $\mathbf{x}_b$  (og  $\mathbf{x}_a$ ) har  $N$  komponenter,  $\mathbf{y}$  har  $M$  komponenter og at  $M \ll N$ . Det betyr at  $\mathbf{B}$  og  $\mathbf{R}$  er  $N \times N$ -matriser og  $\mathbf{H}$  er en  $M \times N$ -matrise.

*Gradienten* (vektor) til  $J(\mathbf{x})$  er gitt ved

$$\nabla J(\mathbf{x}) = \mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_b) + \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{H}\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (8)$$

For å bestemme analyseløsningen  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_a$  setter vi gradienten lik nullvektoren

$$\mathbf{B}^{-1}(\mathbf{x}_a - \mathbf{x}_b) + \mathbf{H}^T \mathbf{R}^{-1}(\mathbf{H}\mathbf{x}_a - \mathbf{y}) = \mathbf{0}. \quad (9)$$

Multipliserer vi ligningen med  $\mathbf{B}$ , setter  $\mathbf{R} = \rho \mathbf{I}$  og løser m.h.p.  $\mathbf{x}_a$  får vi

$$(\mathbf{I} + \rho^{-1} \mathbf{B}\mathbf{H}^T \mathbf{H})\mathbf{x}_a = \mathbf{x}_b + \rho^{-1} \mathbf{B}\mathbf{H}^T \mathbf{y} \quad (10)$$

Ligning 10 er kun en nødvendig betingelse for minimum, men vi ser også at dette er en tilstrekkelig betingelse siden *Hess-matrisen*, gitt ved

$$\nabla^2 J(\mathbf{x}) = \mathbf{B}^{-1} + \rho^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{H},$$

er *positiv definit* (symmetri ok, positive egenverdier ikke innlysende men er sjekket for mindre eksempler).

Observer at  $\mathbf{x}_a \rightarrow \mathbf{x}_b$  når  $\rho \rightarrow \infty$  (null vekt på måledataene) og at ligningen konverger mot

$$\mathbf{H}\mathbf{x}_a = \mathbf{y}$$

når  $\rho \rightarrow 0$  (all vekt på målingene). Begge 'ekstremtilfellene' er som de bør være. Ligning (10) kan skrives som

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_a = \mathbf{b},$$

der

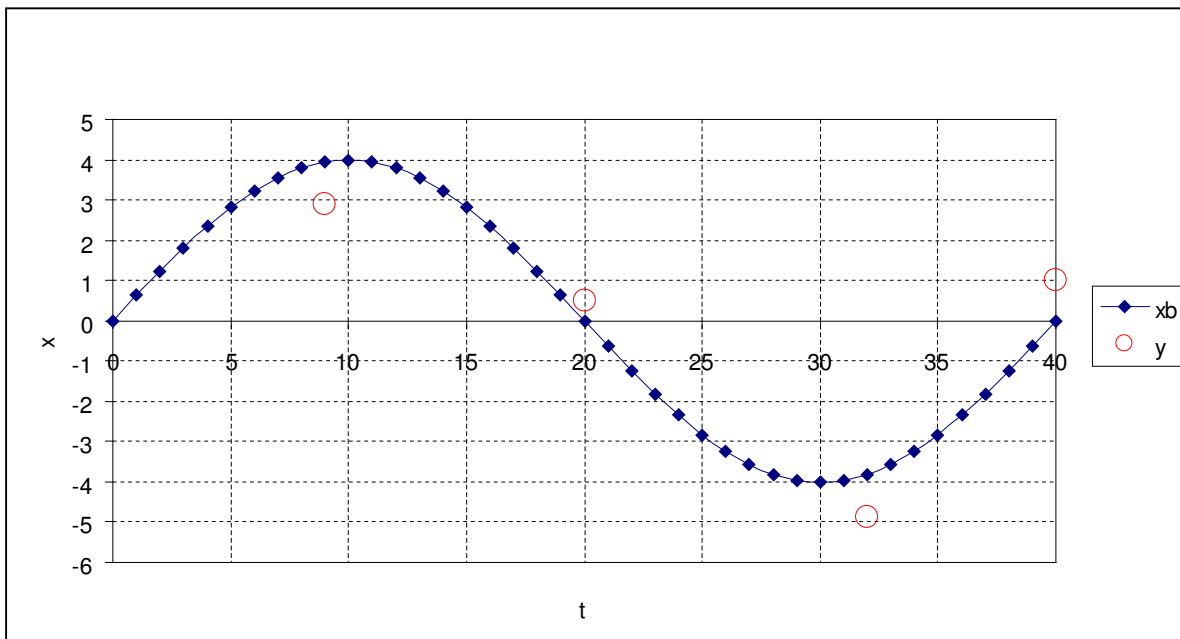
$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{I} + \rho^{-1} \mathbf{B}\mathbf{H}^T \mathbf{H}, \\ \mathbf{b} &= \mathbf{x}_b + \rho^{-1} \mathbf{B}\mathbf{H}^T \mathbf{y}. \end{aligned}$$

Observer at  $\mathbf{A}$  har samme båndbredde som  $\mathbf{B}$  hvis alle målepunktene sammenfaller med komponenter i bakgrunnsvektoren. Hvis minst et målepunkt ligger mellom to komponenter i  $\mathbf{x}_b$  og vi anvender en lineært interpolerende avbildning, vil båndbredden øke med 1. For store systemer vil det selvsagt være lurt å benytte denne matrisestrukturen når ligningssystemet (10) skal løses. For eksemplene i det etterfølgende har vi benyttet en klassisk *Gauss-eliminering* uten hensyntagen til koeffisientmatrisens båndstruktur fordi de resulterende ligningssystemene er relativt små.

### 6.1.1 Eksempel med sinusformet bakgrunnsløsning og en ikke-systematisk amplitudefeil

Vi ser først på et eksempel med en sinusformet bakgrunnsløsning med 41 tidsverdier ( $N = 41$ ). Deretter antar vi at vi har 4 målinger ( $M = 4$ ) i dette tidsintervallet. Målingene er konstruert slik at de representerer en *usystematisk korreksjon* til bakgrunnsløsningen, hovedsaklig på amplitude. Dette er illustrert i Figur 6.

Vi har gjort tester der  $\rho$  er satt lik 1 eller 0.1, som representerer h.h.v. liten og stor vekt på målingene. For begge disse  $\rho$ -verdiene har vi variert influensfaktoren *infl* med verdiene 3, 6 og 9. Målsettingen er å minimere avstanden til målingene samtidig som analyseløsningen har tilnærmet samme form som bakgrunnsløsningen. Fra Figur 7 ser vi tydelig at det er en viss avhengighet mellom valg av  $\rho$ -verdi og influensfaktor *infl*. Med



Figur 6: Eksempel med hovedsaklig amplitudefeil i bakgrunnsløsning.

sterkere vekt på målingene ( $\rho = 0.1$ ) må vi benytte en større influensfaktor for å fremskaffe en 'glatt' analyseløsning enn ellers.

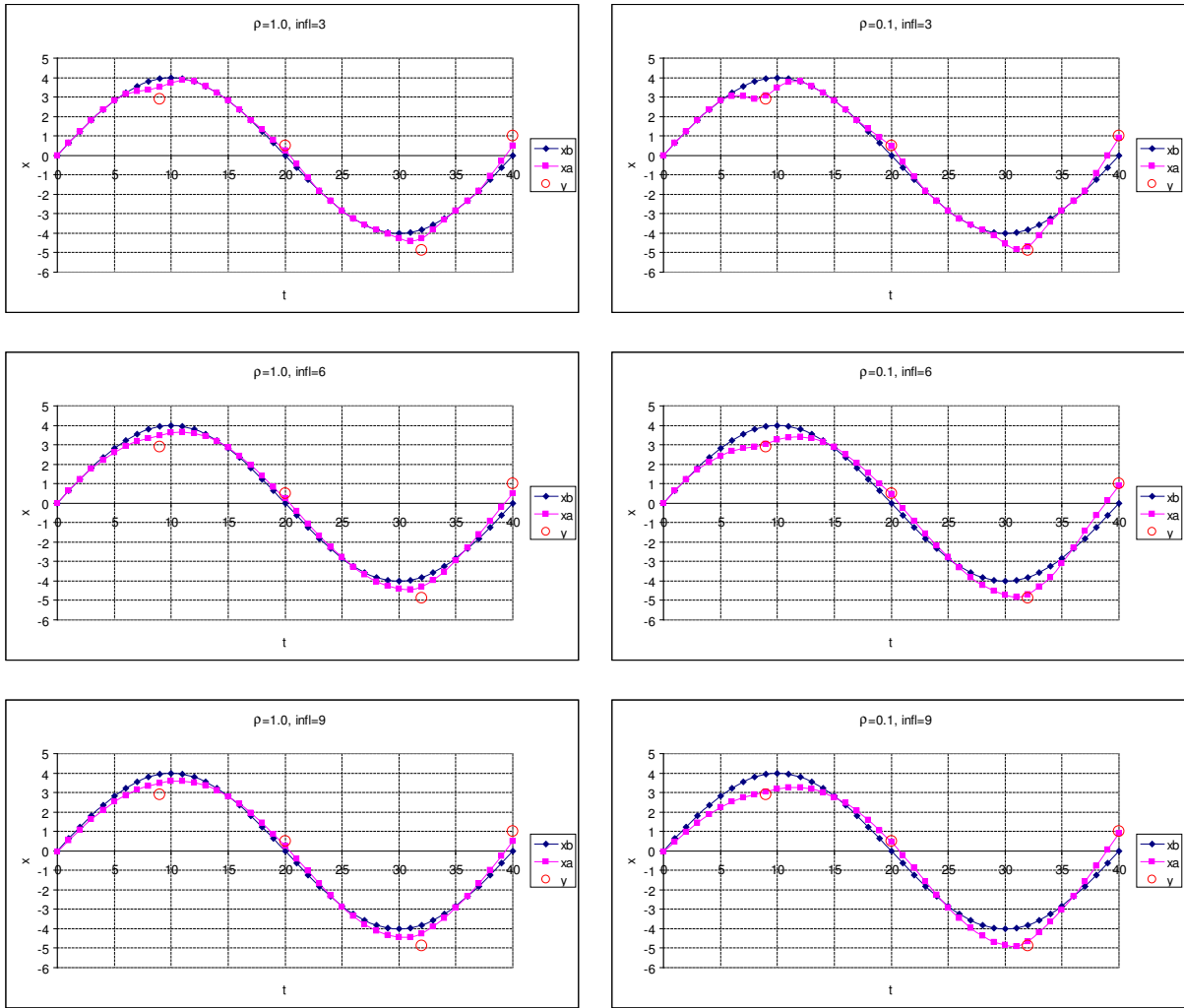
Vi har med hensikt benyttet en usystematisk amplitudefeil for å teste metoden på en realistisk situasjon. Det betyr selvsagt at det ikke er mulig eller ønskelig å beholde formen på bakgrunnsløsningen i analyseløsningen. Dette gjenspeiles også i resultatene som er vist i Figur 7. Mangel på målinger i den første fjerdedelen av tidsintervallet er hovedårsak til at vi ikke er i stand til å nærme oss formen til bakgrunnsløsningen her.

### 6.1.2 Eksempel med sinusformet bakgrunnsløsning og en systematisk faseforskyvning

Vi ser nå på et eksempel som har den samme sinusformede bakgrunnsløsningen som i forrige eksempel, men nå antar vi at de 4 målingene ( $M = 4$ ) er faseforskjøvet  $\pi/8$  radianer. Dette er illustrert i Figur 8.

I dette eksemplet har vi variert  $\rho$  og  $infl$  på samme måte som i eksempel 1. Målsettingen er å minimere avstanden til målingene samtidig som analyseløsningen har samme form som bakgrunnsløsningen, spesielt for siste del av intervallet (siden siste verdi på analysekurven er tenkt benyttet i etterfølgende prediksjon). Fra Figur 9 ser vi at valget  $\rho = 0.1$ ,  $infl = 9$  gir det beste resultatet. I dette kurveplottet vises også resultatet for  $\rho = 0.1$ ,  $infl = 18$  som grønn kurve. Vi har også lagt inn den 'eksakte' kurven, vist som orange kurve. Vi ser at vi tilfellet med ekstra stor influensfaktor ( $infl=18$ ) gir en kurve som ligger nærmere den eksakte kurven enn tilfellet  $infl=9$  i den første fjerdedelen av tidsintervallet. Grunnen til dette må være at måling i punkt 20 begynner å få virkning også her når influensfaktoren er så stor (18).

I Figure 10 er vist resultatet med en ekstra måling i starten av tidsintervallet og med 'tunede' verdier for  $\rho$  og  $infl$  med det som formål å finne ut hvor nært vi kan komme den



Figur 7: Usystematisk amplitudefeil: Analyse for forskjellige verdier av  $\rho$  og influensfaktor  $infl$ .

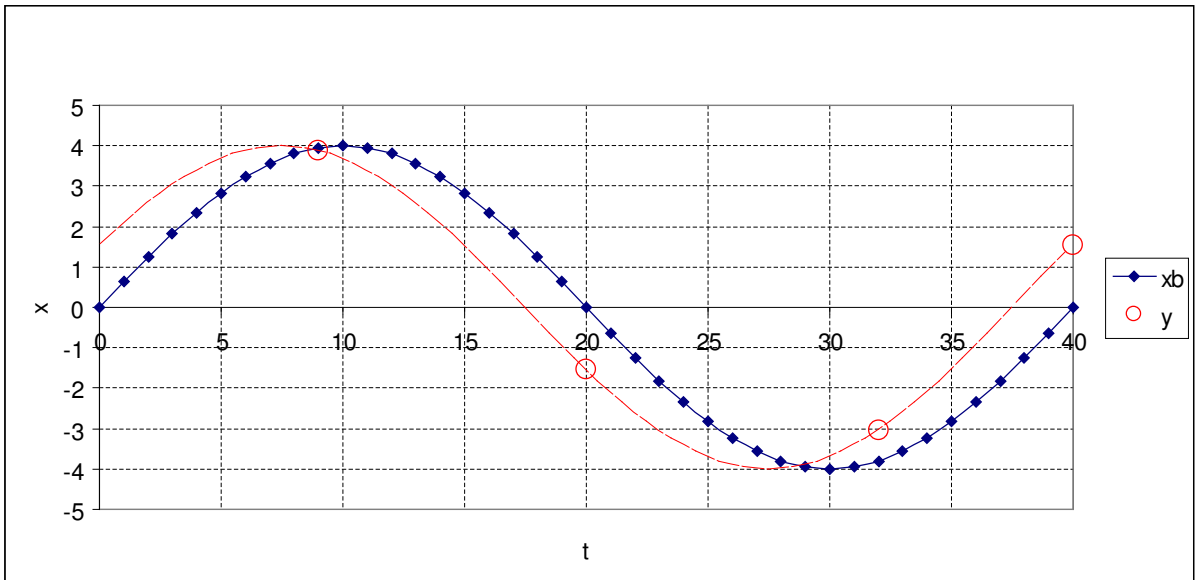
eksakte løsningen i dette faseforskyvningseksemplet. Som figuren viser ligger analyseløsningen 'svært nær' den eksakte løsningen (grønn kurve).

### 6.1.3 Hvor mange målinger trengs? Bakgrunnsløsning med både fase- og amplitudefeil

Vi ser igjen på et eksempel med sinusformet bakgrunnsøsning i en enkelt periode ( $0 - 2\pi$ ). Denne antar vi nå har en kombinert systematisk fase- og amplitudefeil. Et utvalg av testene vi har gjort er vist i Figur 11.

Eksemplet viser tydelig at 3 målinger er for lite til å 'fange opp' faseforskyvningen såvel som amplitudedempningen. Derimot blir amplitudedempningen fanget relativt godt med 4 målinger, men formen til analyseløsningen avviker ganske mye fra den eksakte løsningen ( $x_t$ ) i den første (2/3)-del av tidsintervallet. Med 5 målinger får vi imidlertid en meget god tilnærming. Antallet 5 samsvarer med at vi har 2 endepunkter, 2 ekstremalpunkter og et





Figur 8: Eksempel med systematisk faseforskyvning.

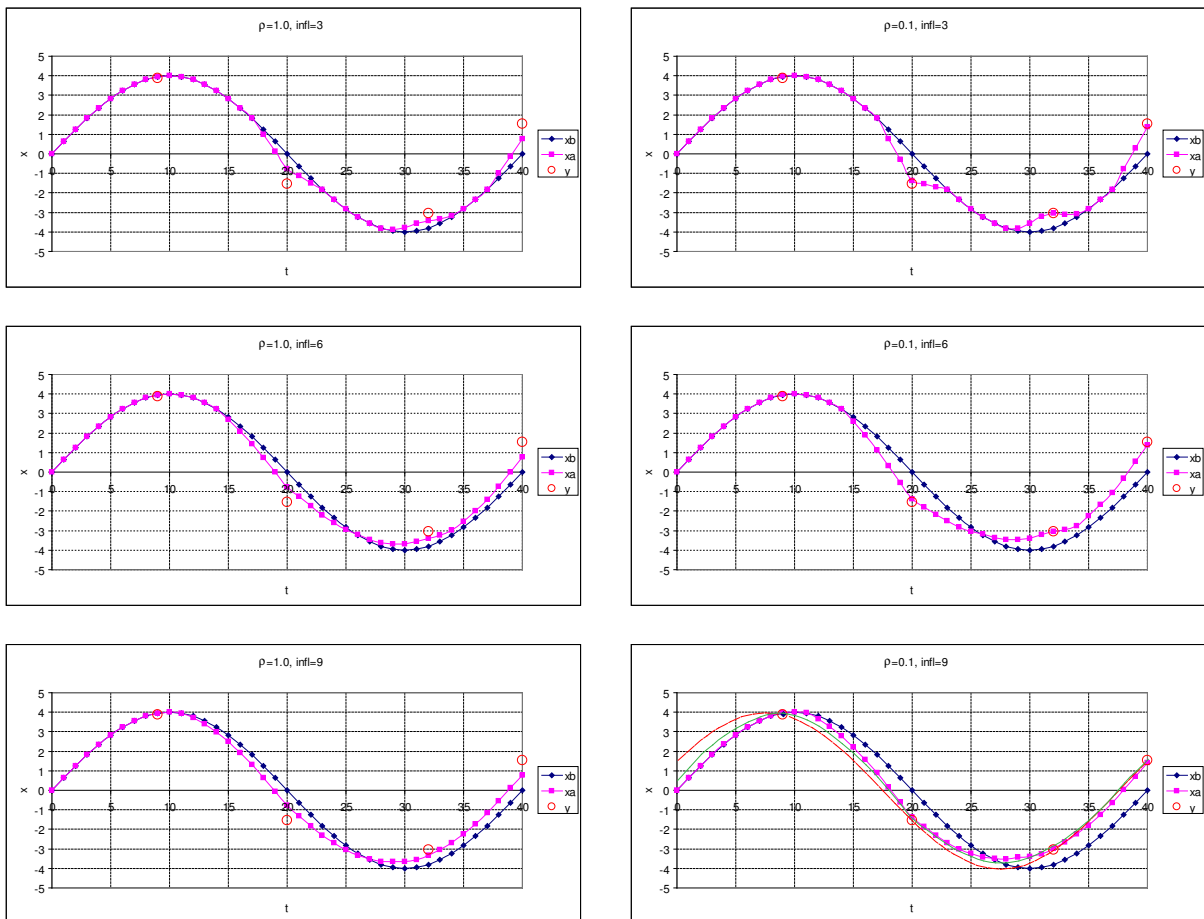
vendepunkt i det spesielle eksemplet vi har testet. I praksis vil det være mulig å analysere en gitt bakgrunnsløsning for et gitt tidsintervall m.h.p. de samme karakteristikka. Dette kan da være til hjelp med tanke på valg av målinger eller vurdering av tilgjengelige målingers tilstrekkelighet.

#### 6.1.4 Eksempel med sinusformet bakgrunnsløsning med variabel amplitude og systematisk fasefeil

Vi ser på et eksempel med sinusformet bakgrunnsøsning i tre perioder ( $0 - 6\pi$ ) med *variabel amplitude*. I Figur 12 er vist resultatene med 11 og 13 målinger. Siste alternativ samsvarer med antall endepunkt, ekstremalpunkt og vendepunkt som viser (også her) at det antallet målinger er akkurat nok til å generere en glatt analyseløsning som ligger meget nær den eksakte løsningen.

#### 6.1.5 Lineær, kvadratisk og kubisk influens-profil

Vi ser fra en rekke av plottene knyttet til tidligere tester at vi mangler  $C^1$ -kontinuitet i analyseløsningen i måletidspunktene. Det er naturlig å anta at dette er p.g.a. 'hattefunksjonsprofilen' på influensfaktoren i kovariansmatrisen  $\mathbf{B}$ , m.a.o. har den en knekk i midten. Hvis vi isteden f.eks. benytter et høyereorden polynomisk profil, er det forventet at vi skal kunne få en glattere analyseløsning. Med tilpasning av båndbredden får vi også det forventede resultat med både et kvadratisk og et kubisk profil som Figur 13 viser. Det er verdt å merke seg at båndbredden for det 'kvadratiske tilfellet' må være mindre eller lik avstanden mellom målepunktene. For et kubisk profil må vi bruke en båndbredde som er 2 ganger avstanden mellom målepunktene. Dette krever en nærmere analyse. De tre



Figur 9: Systematisk faseforskyvning: Analyse for forskjellige verdier av  $\rho$  og influensfaktor  $infl$ .

forskjellige profilene er vist i Figur 14 og er gitt ved

$$\beta_1 = 1 - \frac{|i - j|}{infl} \quad (11)$$

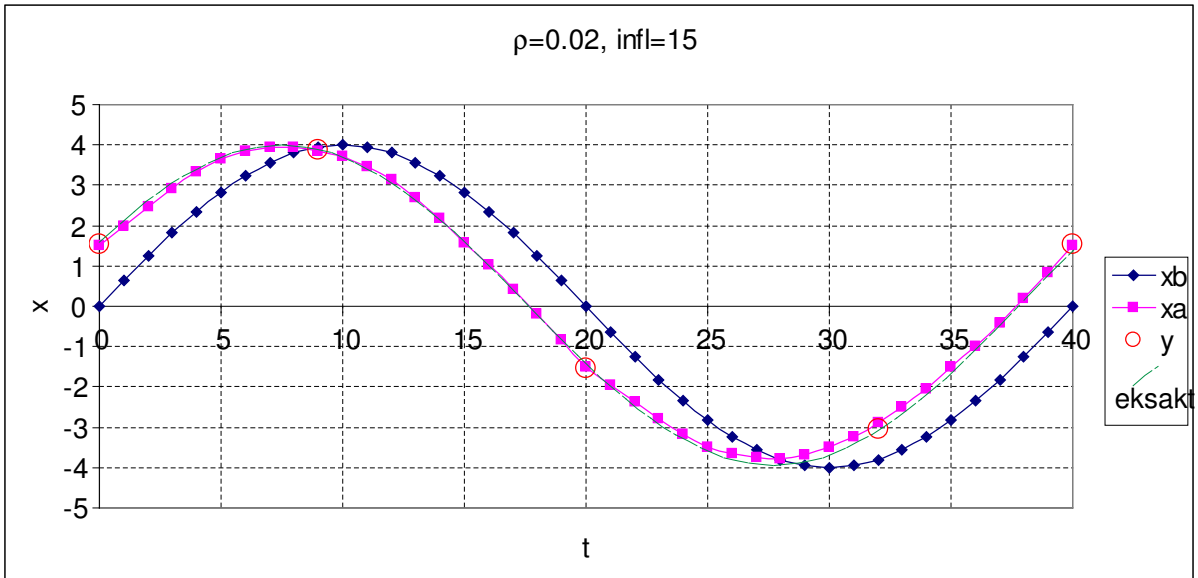
$$\beta_2 = 1 - \frac{|i - j|^2}{infl^2} \quad (12)$$

$$\beta_3 = 1 - \frac{|i - j|^3}{infl^3} \times (3 infl - 2abs(i - j)) \quad (13)$$

## 6.2 Ekstrapolering av analysekurven inn i prediksjonsintervallet

Spørsmålet nå er hvordan vi skal ekstrapolere analyseløsningen inn i prediksjonsintervallet der vi kun har en bakgrunnsøsning. På en eller annen måte må vi trekke ut 'karakteristikkene' fra analyseløsningen og videreføre disse inn i prediksjonsintervallet.

I Figure 15 er illustrert hvordan en ekstrapolering kan gjøres i det tilfellet vi har et scenarie med faseforskyvning og lineært voksende amplitude. Som vi ser av det midtre plottet



Figur 10: Eksempel med tilleggsmåling i starten av tidsintervallet.

i figuren er kurven til differansen  $x_b(t) - x_a(t)$  en glatt kurve som viser en karakteristisk 'bølgeaktig' variasjon med en gitt fase og amplitude-endring. Dette vil det være mulig å utnytte i prediksjonsintervallet. En konservativt estimat ville være å benytte en middelværdi for amplitude og periode samt faseforskyvning, lest ut fra differansen  $x_b(t) - x_a(t)$ . En 'polynomisk parametertilpasning' er vurdert, men ikke funnet å inneha nødvendige egenskaper for vårt formål, nemlig å fange spesifikke karakteristikk som vi kan ekstrapolere inn i prediksjonsintervallet. I det etterfølgende vil vi isteden gå ut ifra at differansen har en spesifikk variasjon der både amplitudevariasjon ( $a_0 + a_1 t$ ), faseforskyvning ( $\omega_0$ ) og periode eller bølgelengde ( $\omega_1$ ) inngår eksplisitt

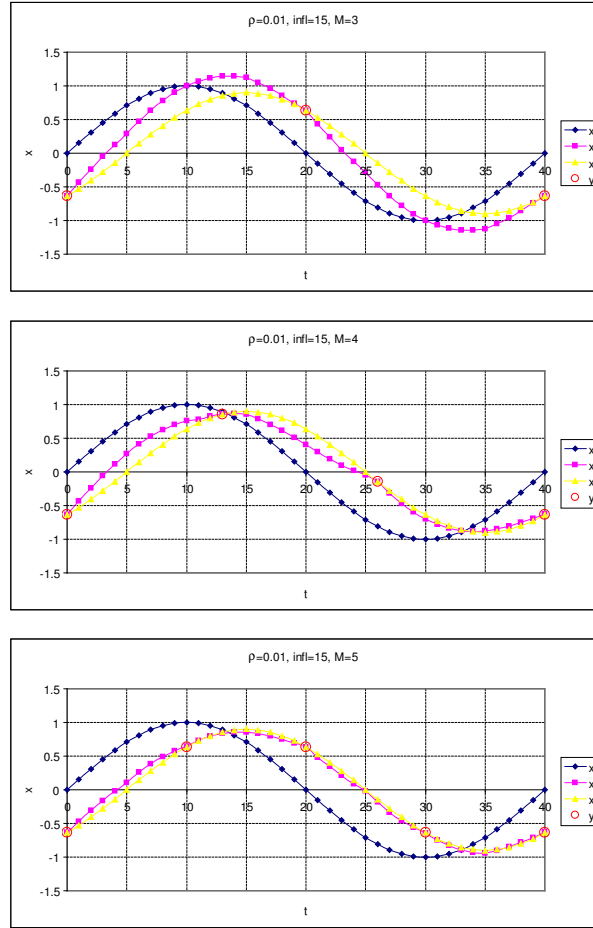
$$dx_{ab}(t) \equiv x_b(t) - x_a(t) := (a_0 + a_1 t) \sin(\omega_0 + \omega_1 t), \quad (14)$$

Anvender vi en slik tilpasning, kan vi anvende en 'minste-kvadraters metode' med  $E_i = x_b(t_i) - x_a(t_i)$

$$\min_{a_0, a_1, \omega_0, \omega_1} \left( F(a_0, a_1, \omega_0, \omega_1) \equiv \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N [(a_0 + a_1 t_i) \sin(\omega_0 + \omega_1 t_i) - E_i]^2 \right).$$

Løsningen må tilfredsstillere kravene

$$\frac{\partial F}{\partial a_0} = \frac{\partial F}{\partial a_1} = \frac{\partial F}{\partial \omega_0} = \frac{\partial F}{\partial \omega_1} = 0$$



Figur 11: Eksempel med forskjellig antall målinger.

som gir

$$g_1(a_0, a_1, \omega_0, \omega_1) \equiv \sum_{i=1}^N [(a_0 + a_1 t_i) \sin(\omega_0 + \omega_1 t_i) - E_i] \sin(\omega_0 + \omega_1 t_i) = 0 \quad (15)$$

$$g_2(a_0, a_1, \omega_0, \omega_1) \equiv \sum_{i=1}^N [(a_0 + a_1 t_i) \sin(\omega_0 + \omega_1 t_i) - E_i] t_i \sin(\omega_0 + \omega_1 t_i) = 0 \quad (16)$$

$$g_3 \equiv \sum_{i=1}^N [(a_0 + a_1 t_i) \sin(\omega_0 + \omega_1 t_i) - E_i] (a_0 + a_1 t_i) \cos(\omega_0 + \omega_1 t_i) = 0 \quad (17)$$

$$g_4 \equiv \sum_{i=1}^N [(a_0 + a_1 t_i) \sin(\omega_0 + \omega_1 t_i) - E_i] (a_0 + a_1 t_i) t_i \cos(\omega_0 + \omega_1 t_i) = 0 \quad (18)$$

Ligningssystem (15-18) kan løses m.h.p.  $a_0, a_1, \omega_0, \omega_1$  med f.eks. Newtons iterative metode.

La  $r = 0, 1, 2, \dots$  være *iterasjonsindeksen*. For dette systemet får da metoden formen

$$\begin{aligned} a_0^{(r+1)} &= a_0^{(r)} + da_0^{(r+1)} \\ a_1^{(r+1)} &= a_1^{(r)} + da_1^{(r+1)} \\ \omega_0^{(r+1)} &= \omega_0^{(r)} + d\omega_0^{(r+1)} \\ \omega_1^{(r+1)} &= \omega_1^{(r)} + d\omega_1^{(r+1)} \end{aligned}$$

der  $a_0^{(r+1)}$ ,  $a_1^{(r+1)}$ ,  $\omega_0^{(r+1)}$ ,  $\omega_1^{(r+1)}$  er gitt ved det lineære ligningssystemet

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{\partial g_1}{\partial a_0}\right)^{(r)} & \left(\frac{\partial g_1}{\partial a_1}\right)^{(r)} & \left(\frac{\partial g_1}{\partial \omega_0}\right)^{(r)} & \left(\frac{\partial g_1}{\partial \omega_1}\right)^{(r)} \\ \left(\frac{\partial g_2}{\partial a_0}\right)^{(r)} & \left(\frac{\partial g_2}{\partial a_1}\right)^{(r)} & \left(\frac{\partial g_2}{\partial \omega_0}\right)^{(r)} & \left(\frac{\partial g_2}{\partial \omega_1}\right)^{(r)} \\ \left(\frac{\partial g_3}{\partial a_0}\right)^{(r)} & \left(\frac{\partial g_3}{\partial a_1}\right)^{(r)} & \left(\frac{\partial g_3}{\partial \omega_0}\right)^{(r)} & \left(\frac{\partial g_3}{\partial \omega_1}\right)^{(r)} \\ \left(\frac{\partial g_4}{\partial a_0}\right)^{(r)} & \left(\frac{\partial g_4}{\partial a_1}\right)^{(r)} & \left(\frac{\partial g_4}{\partial \omega_0}\right)^{(r)} & \left(\frac{\partial g_4}{\partial \omega_1}\right)^{(r)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} da_0^{(r+1)} \\ da_1^{(r+1)} \\ d\omega_0^{(r+1)} \\ d\omega_1^{(r+1)} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} g_1^{(r)} \\ g_2^{(r)} \\ g_3^{(r)} \\ g_4^{(r)} \end{bmatrix} \quad (19)$$

Koeffisientene i matrisen ovenfor får vi ved å differensiere  $g_1$ ,  $g_2$ ,  $g_3$  og  $g_4$  m.h.p.  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $\omega_0$  og  $\omega_1$ . Ligningssystemet (19) blir symmetrisk og er gitt ved ligningene (15-18) samt

$$\frac{\partial g_1}{\partial a_0} = \sum_{i=1}^N \sin^2(\omega_0 + \omega_1 t_i) \quad (20)$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial a_1} = \sum_{i=1}^N t_i^2 \sin^2(\omega_0 + \omega_1 t_i) \quad (21)$$

$$\frac{\partial g_3}{\partial \omega_0} = \sum_{i=1}^N (a_0 + a_1 t_i) [(a_0 + a_1 t_i) \cos[2(\omega_0 + \omega_1 t_i)] + E_i \sin(\omega_0 + \omega_1 t_i)] \quad (22)$$

$$\frac{\partial g_4}{\partial \omega_1} = \sum_{i=1}^N t_i^2 (a_0 + a_1 t_i) [(a_0 + a_1 t_i) \cos[2(\omega_0 + \omega_1 t_i)] + E_i \sin(\omega_0 + \omega_1 t_i)] \quad (23)$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial a_1} = \frac{\partial g_2}{\partial a_0} = \sum_{i=1}^N t_i \sin^2(\omega_0 + \omega_1 t_i) \quad (24)$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial \omega_0} = \frac{\partial g_3}{\partial a_0} = \sum_{i=1}^N (a_0 + a_1 t_i) \sin[2(\omega_0 + \omega_1 t_i)] + E_i \cos(\omega_0 + \omega_1 t_i) \quad (25)$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial \omega_1} = \frac{\partial g_4}{\partial a_1} = \sum_{i=1}^N t_i^2 (a_0 + a_1 t_i) \sin[2(\omega_0 + \omega_1 t_i)] + E_i \cos(\omega_0 + \omega_1 t_i) \quad (26)$$

$$\frac{\partial g_3}{\partial \omega_1} = \frac{\partial g_4}{\partial \omega_0} = \sum_{i=1}^N t_i (a_0 + a_1 t_i) [(a_0 + a_1 t_i) \cos[2(\omega_0 + \omega_1 t_i)] + E_i \sin(\omega_0 + \omega_1 t_i)] \quad (27)$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial \omega_1} = \frac{\partial g_4}{\partial a_0} = \frac{\partial g_2}{\partial \omega_0} = \frac{\partial g_3}{\partial a_1} = \sum_{i=1}^N t_i (a_0 + a_1 t_i) \sin[2(\omega_0 + \omega_1 t_i)] + E_i \cos(\omega_0 + \omega_1 t_i) \quad (28)$$

Nå gjenstår kun korleksjon av bakgrunnsløsningen i prediksjonsintervallet ved ekstrapolasjon av  $dx_{ab}(t)$

$$x_a(t) = x_b(t) - dx_{ab}(t).$$

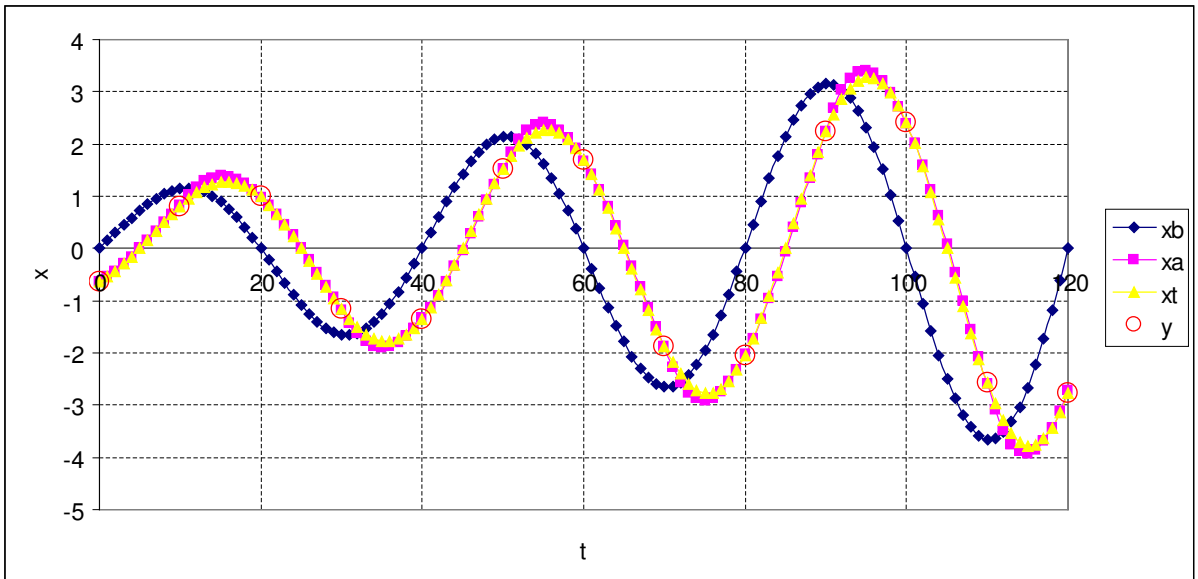
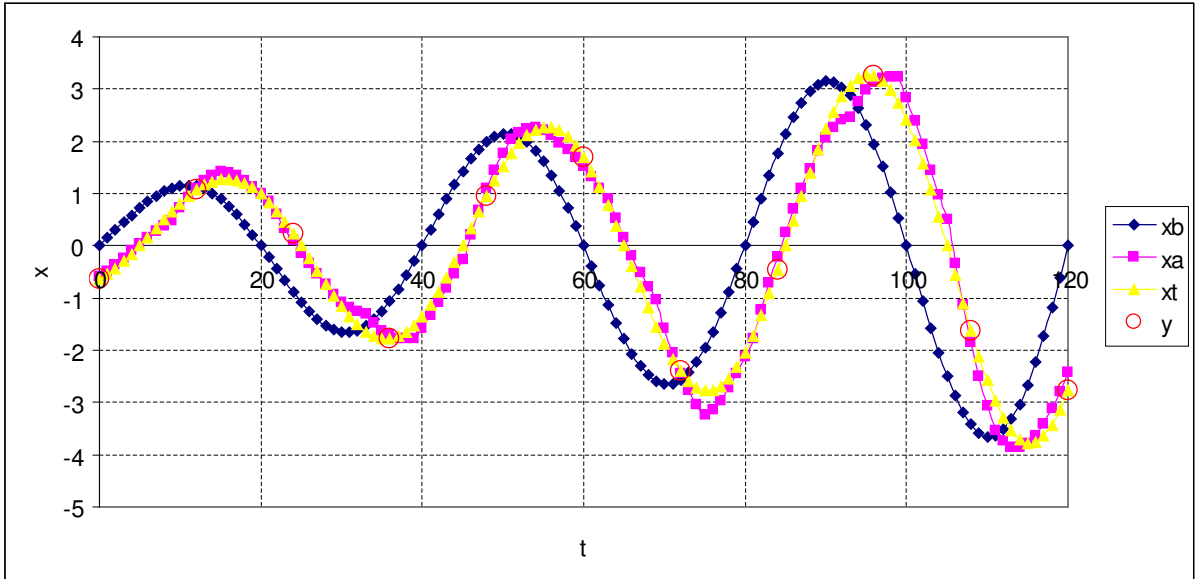
Dette gjøres for alle målepunkter slik at vi til syvende og sist har en tidsvarierende randbetingelse for hele prediksjonsintervallet i disse punktene. Som tidligere nevnt (og argumentert for) bør disse målepunktene være lokalisert i et viss høyde over terrenget slik at terrengeffekter i størst mulig grad er eliminert fra måleverdiene; m.a.o. ønsker vi å fange opp dynamiske og trendsettende vindforhold (eventuelt også trykk- og temperaturforhold) i en periode før prediksjonsintervallet som i størst mulig grad er representative for hele prediksjonsområdet. En metode for å ekstrapolere de estimerte punktvariasjonene i prediksjonsintervallet til rendene er beskrevet tidligere, men i hovedsak går metoden ut på først å ekstrapolere i horisontalplanet der målingen er foretatt og deretter benytte en 'profil-antagelse' for variasjonen ned mot bakken.

## Konklusjon

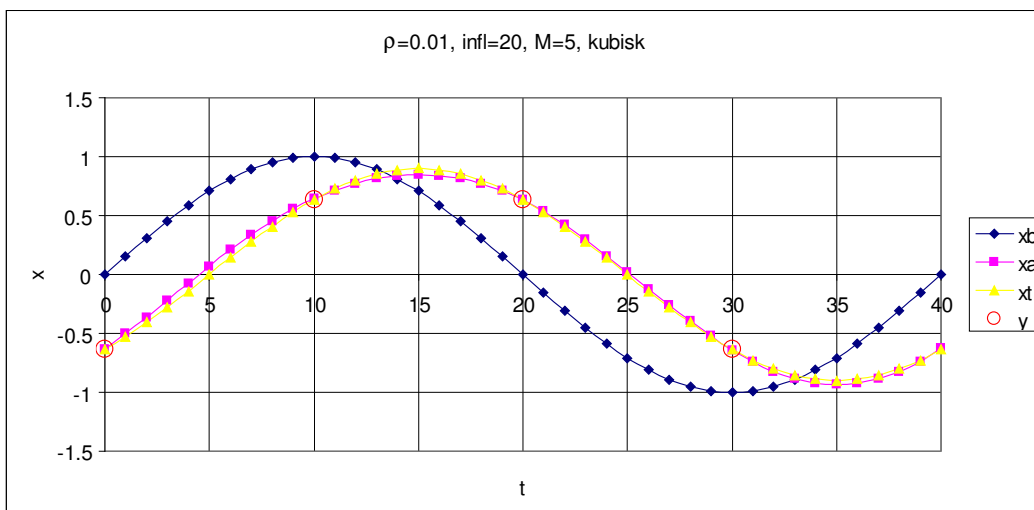
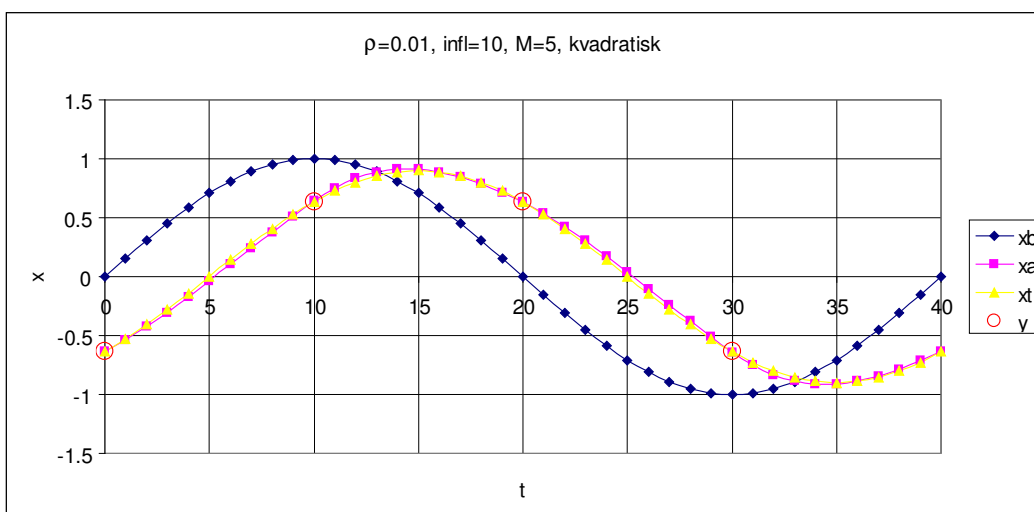
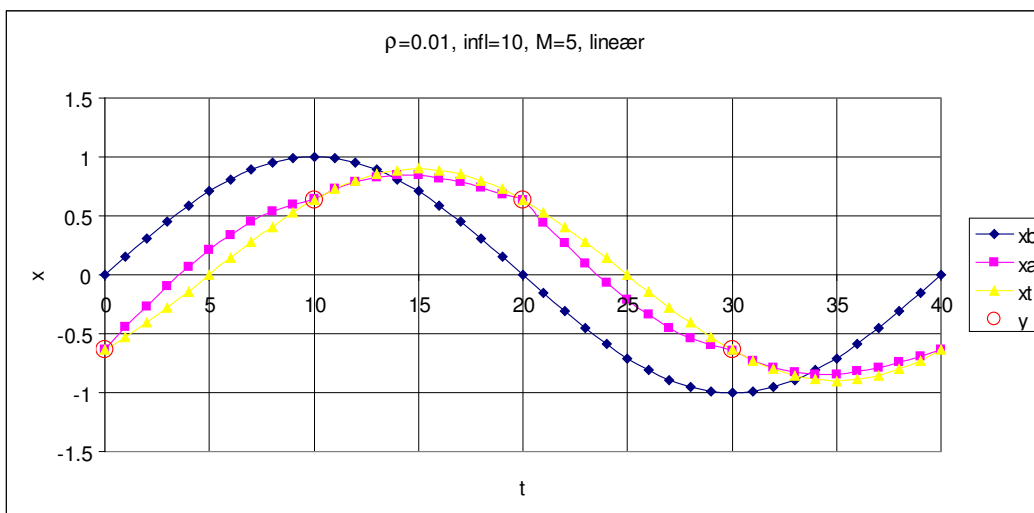
Figur 15 viser en bemerkelsesverdig god analyseløsning i prediksjonsintervallet (til høyre for den vertikale røde linjen i Figur 15). Grunnen til det er nok at vår antagelse om 'avviksprofil' på formen gitt ved ligning (14) er meget god, bedre enn det vi antagelig i alminnelighet er istand til å anta i det generelle tilfellet.

Disse testene er meget lovende, men det gjenstår å gjøre mer omfattende tester på andre eksempler. Det vil ikke minst være viktig å teste metoden på realistiske tilfeller der bakgrunnsløsningen har andre systematiske avvik i forhold til målinger.

Siden  $x_b(t) - x_a(t)$  kan ha vidt forskjellig form i intervallet der vi har målinger (og der vi gjør parametertilpasning) er det naturlig å tenke seg anvendt en endelig Fourier-rekke istedenfor uttrykket i ligning (14). Dette vil bli undersøkt i det videre arbeid.

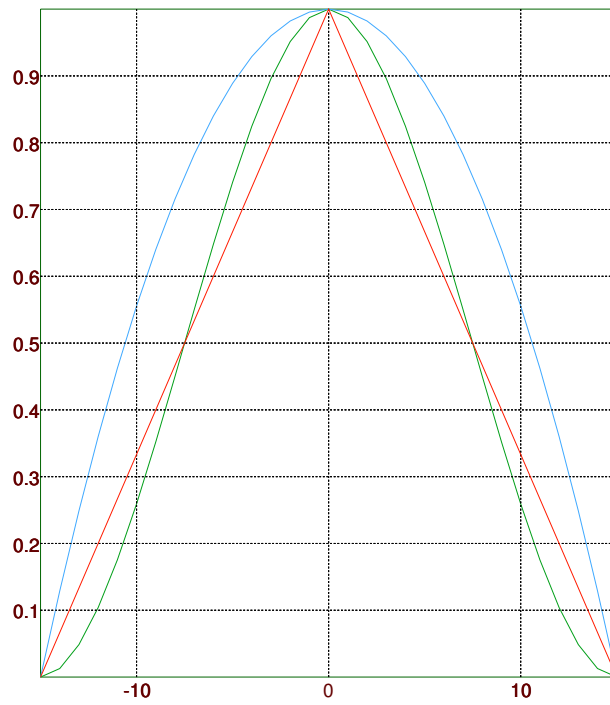


Figur 12: Eksempel med varierende amplitude.

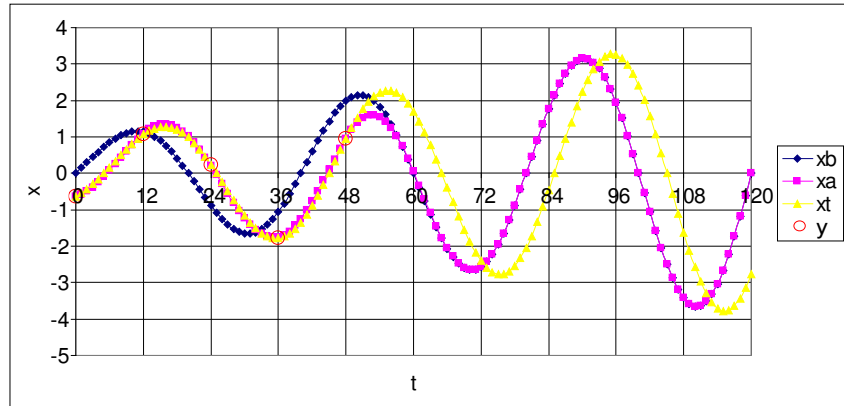


Figur 13: Sammenligning mellom lineær, kvadratisk og kubisk influensprofil.

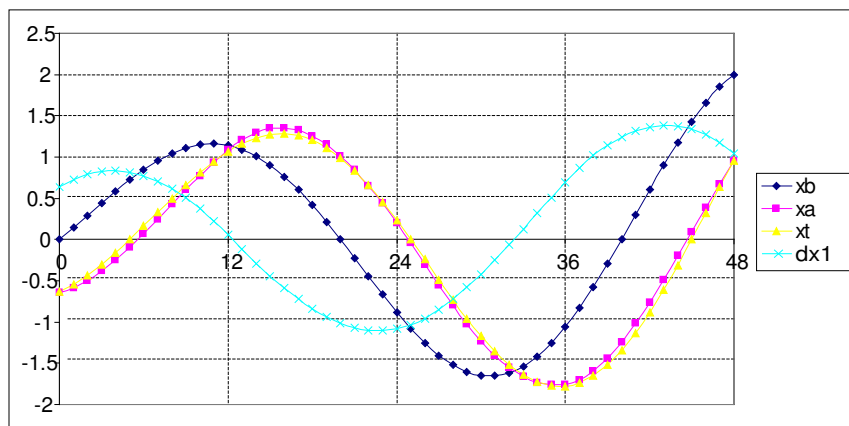




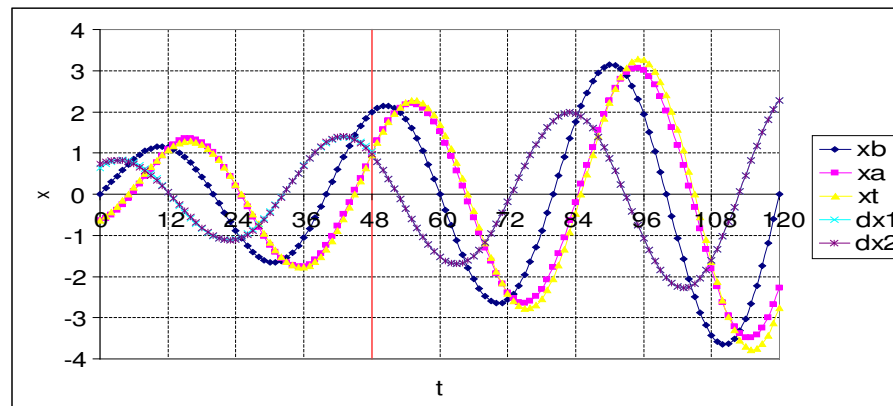
Figur 14: Lineært, kvadratisk og kubisk influensprofil.



(a)  $x_a$  beregnet kun med 5 målinger i intervallet  $[0,48]$



(b)  $dx_1 = x_b - x_a$  i intervallet  $[0,48]$



(c)  $x_a = x_b - dx_1$  (ekstrapolert) i intervallet  $[48,120]$

Figur 15: Ekstrapolering av analysekurve med systematisk amplitudeendring og fast faseforskyvning. Den 'røde' kurven til høyre for den røde, vertikale linjen er 'korrigert' v.h.a. en ekstrapolert blå kurve. Parametrene  $\rho = 0.1$ ,  $infl = 24$  og  $M = 5$  (5 målinger) er anvendt i dette tilfellet.

## Referanser

- [1] Hunt, J.C.R., Snyder, W.H. (1980): Experiments on stably and neutrally stratified flow over a model three-dimensional hill. *J. Fluid Mech.* (1980), **96**, 671–704.
- [2] Lund, B., Eidsvik, K., Sørli, K., Utnes, T., Berntsen, H., ALMOD - Summary of Lecture Series on Data Assimilation Techniques, SINTEF Report A4205, 2007.

# APPENDIKS A

## A Forenklet 3d-Var: Lokal data-assimilering

### A.1 Generell kostfunksjon

Kostfunksjonen for analysen kan ifølge standard 3d-Var variasjonsformulering uttrykkes på formen (Bouttier & Courtier [1]):

$$J(x) = (x - x_b)^T B^{-1}(x - x_b) + (y - Hx)^T R^{-1}(y - Hx) \quad (\text{A-1})$$

Her representerer første ledd på høyre side effekten fra bakgrunnsløsningen  $x_b$ , og siste ledd gir effekten fra observasjonsdata  $y$ . Tilstandsvektoren  $x$  inneholder i vårt tilfelle variable som hastighet, temperatur m.m.,  $H$  er en transformasjonsmatrise, mens  $B$  og  $R$  er kovariansmatriser for hhv. bakgrunns- og observasjonsdata.

Minimumsverdien,  $\min J(x)$ , finnes ved å sette gradienten  $\nabla J(x) = 0$  for  $x = x_a$ :

$$\nabla J(x_a) = 0 = 2B^{-1}(x_a - x_b) - 2H^T R^{-1}(y - Hx_a) \quad (\text{A-2})$$

som gir følgende uttrykk:

$$x_a - x_b = BH^T R^{-1}(y - Hx_a) \quad (\text{A-3})$$

Vektoren  $x_a$  betegnes 'analysevektoren', dvs. den søkte verdien av tilstandsvektoren som minimaliserer kostfunksjonen, og som gir korrigerte initial- og randverdier. Relasjonen (A-3) kan også uttrykkes eksplisitt på formen ([1])

$$x_a - x_b = BH^T (HBH^T + R)^{-1}(y - Hx_b) \quad (\text{A-4})$$

### A.2 Eksempel med ett observasjonspunkt

Med tanke på relativt liten datatilgangen i det lokale området, er det interessant å se på følgende forenklinger:

- **Anta at tilstandsvektoren  $x$  er gitt i  $N$  gridpunkter, og at vi har bare én observasjon, spesifisert i gridpunkt  $k$ .**

Dette gir følgende forenkling:

Observasjonsoperatoren reduseres til

$$H = (0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0)$$

hvor verdien '1' er gitt i gridpunkt  $k$ .

Observasjons-kovariansmatrisen reduseres til en skalar varians definert ved  $R \equiv \sigma_o^2$ .

Videre forenkles matriseproduktene

$$BH^T = [B_{1k}, B_{2k}, \dots, B_{Nk}]^T$$

dvs. at bare den k-te kolonnen i bakgrunns-kovariansmatrisen gjenstår, og

$$H(BH^T) = B_{kk} \equiv \sigma_b^2$$

som representerer den skalare bakgrunns-variansen.

Løsningen (A-4) reduseres dermed til følgende uttrykk:

$$x_a - x_b = \frac{y_k - x_{b,k}}{\sigma_b^2 + \sigma_o^2} [B_{1k}, B_{2k}, \dots, B_{Nk}]^T \quad (\text{A-5})$$

hvor  $(y_k - x_{b,k})$  angir den skalare differansen mellom observasjonsverdi og bakgrunnsverdi i gridpunkt k. Vi ser dermed at bakgrunns-kovariansmatrisen er avgjørende for hvordan informasjonen spres ut fra punkt 'k' (hvor observasjonspunktet befinner seg).

### A.2.1 Fordeling av høyde-korreksjon

Vi gjør nå følgende tilleggsantakelse ut fra fysiske betraktninger:

- **Anta at høydedata sprer informasjon tilnærmet uniformt i høydenivå langt over lokale fjellformasjoner.**

Dvs. at bakgrunns-kovariansmatrisen for høydedata reduseres til

$$B_{h,k} \approx \sigma_b^2 [1, 1, \dots, 1_h]^T$$

hvor indeks 'h,k' refererer til alle gridpunkter i samme høyde som 'k'. For dette høydenivået blir dermed analysen forenklet til

$$x_{a,h} = x_{b,h} + (y_k - x_{b,k}) \frac{\sigma_b^2}{\sigma_b^2 + \sigma_o^2} [1, 1, \dots, 1_h]^T \quad (\text{A-6})$$

Med gitt horisontal fordeling av høyde-korreksjonen gjenstår dermed å finne en fornuftig vertikal fordeling ned mot bakkenivået. På bakken er hastighetskorreksjonen lik null, og vi må anta en vertikal fordeling ut fra fysiske vurderinger, hvor korreksjonseffekten avtar mot null i bakkenivå. Formelt antas dermed at fordelingen kan faktoriseres i en horisontal og vertikal del, og den totale distribusjonen blir da av typen

$$x_a = x_b + (y_k - x_{b,k}) f(z/H) \frac{\sigma_b^2}{\sigma_b^2 + \sigma_o^2} [1, 1, \dots, 1_h]^T \quad (\text{A-7})$$

hvor  $f(z/H)$  er en antatt vertikal fordeling,  $H$  er høyden til øverste modellnivået hvor høydedata måles,  $z$  er den aktuelle høyden, og alle høyder måles fra bakkenivå. Likevektsprofilen ved nøytral strømming er tilnærmet logaritmisk over flatt terreng, og dette kan derfor være et mulig valg av vertikale fordeling i slike tilfeller. Mer generelt kan det være realistisk å velge samme vertikale fordeling som allerede gitt fra bakgrunns-løsningen, og vi får dermed

$$f(z/H) \propto \begin{cases} \ln(z/z_o), & \text{for konstant horisontal posisjon} \\ x_b(z/H), & \text{d.s.} \end{cases} \quad (\text{A-8})$$

### A.3 Tidsfaktoren ved korreksjon av randverdier

Ligning (A-7) representerer korrigerede verdier ( $x_a$ ) for de variable omkring det tidspunkt  $t_o$  hvor observasjonen  $y_k$  er gjort. Dette gir korrigerede initialbetingelser for modellen ved samme tidspunkt ( $t_o$ ). Men problemet er nå hvordan **randbetingelsene** skal korrigeres framover i tid i løpet av varslingsperioden som starter ved  $t_o$ .

Problematikken er følgende: I løpet av varslingsperioden som starter ved tidspunktet  $t_o$ , oppdateres bakgrunnsverdien  $x_b$  fortløpende i tid med verdier fra en storskala modell (UM1). I tillegg har vi korreksjonen fra observasjonen  $y_k$  ved  $t = t_o$ , slik at analyseverdien  $x_a$  gir oss det beste estimatet både for initial- og randverdier ved starttidspunktet  $t_o$ . Men hvordan skal data-korreksjonen ( $y_k - x_{b,k}$ ) behandles for  $t > t_o$  ?

For en effektiv bruk av lokal data-assimilering er dette kanskje både det vanskeligste og viktigste problemet å finne ut av, spesielt fordi **randbetingelsene** styrer den lokale løsningen i mye større grad enn initialbetingelsene. Typisk tar det bare 10 - 20 min. før en partikkel transporteres gjennom hele det lokale området, og 'hukommelsen' om det opprinnelige initialfeltet er like kort. Derimot styrer randbetingelsene løsningen gjennom hele varslingsperioden, som typisk kan være noen få timer.

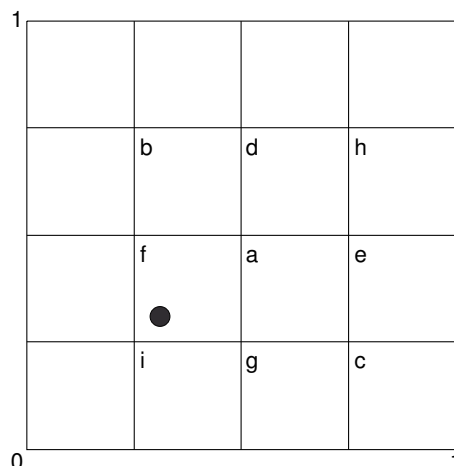
## Referanser

- [1] Bouttier F., Courtier P.: Data assimilation concepts and methods. Meteorological Training Course Lecture Series, ECMWF, 2002.

# APPENDIKS B

## B Sensitivitetsanalyse - forenklet 2D-analyse

I dette appendiks rapporterer vi resultater vedrørende sensitiviteten til strømningsfeltet m.h.t. variasjoner i vindstyrke, på de segmentene av beregningsområdet der luften kommer inn i området. For enkelhets skyld lar vi beregningsområdet være 2-dimensjonalt og enhetskvadratet med en sirkulær hindring med gitt diameter og plassering. Dette er illustrert i Figur 16. Vindretningen antas enten å være konstant sør-vestlig" (Figure 17) eller kontinuerlig varierende mellom sør og vest, som resulterer i at den sørlige og vestlige delen av randa er "innstrømsegmenter". Spørsmålet vi stiller oss er hvilke deler av strømningsområdet som er mest sensitiv til endringer i vindstyrken på disse innstrømsegmentene.



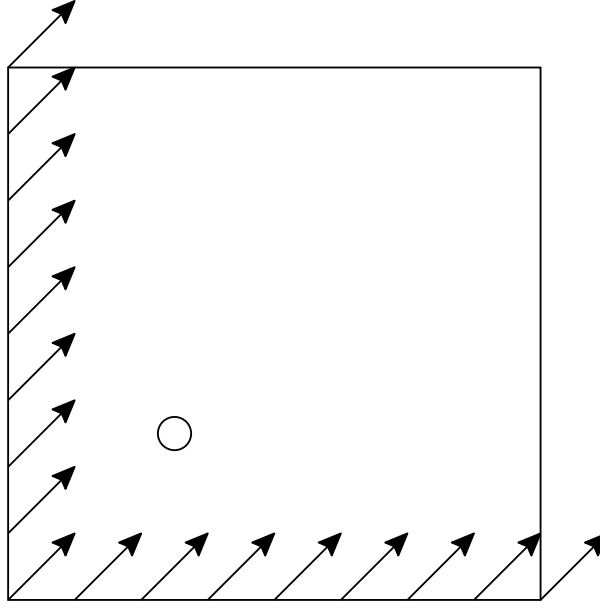
Figur 16: Strømningsområde med et sirkulært hinder. Også punkt plassering for spesielle sensitivitetskurver ( $a, \dots, i$ ) er vist.

### B.1 Navier-Stokes ligninger for plan strømning

Ikke-stasjonær, inkompressibel strømning av en viskøs væske i et to-dimensjonalt område  $\Omega$  er fullstendig beskrevet av væskens hastighet  $\mathbf{u}$  med dens horisontale og vertikale komponenter  $u(x, y)$ ,  $v(x, y)$  og trykk  $p(x, y)$ .

Funksjonene  $u$ ,  $v$  and  $p$  blir kalt *tilstandsfunksjoner*, og dette settet av tilstandsfunksjoner blir kalt en *tilstandsløsning*. Dette betyr at hastighet og trykk i hvert punkt i  $\Omega$  fullstendig beskriver tilstanden til det fysiske systemet som betraktes.

Gitt våre antagelser om problemet så antar vi at strømningsfunksjonene  $u$ ,  $v$  og  $p$  tilfredsstiller Navier-Stokes ligninger for ikke-stasjonær, inkompressibel, viskøs strømning



Figur 17: Senarie for sensitivitetsanalyse.

i hvert punkt  $(x, y)$  i strømningsområdet  $\Omega$ . Disse ligningene kan skrives som:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - \nu \nabla^2 u + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (\text{A-9})$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} - \nu \nabla^2 v + \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (\text{A-10})$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{A-11})$$

med følgende randbetingelser

$$u = v = \frac{c}{\sqrt{2}} \quad \text{for } x = 0 \text{ \& } y = 0 \quad (\text{hastighet } |\mathbf{u}| \equiv \sqrt{u^2 + v^2} = c) \quad (\text{A-12})$$

$$u = v = 0 \quad \text{for } (x, y) \in \Gamma_0 \quad (\text{heft}) \quad (\text{A-13})$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad \text{for } x = 1 \text{ \& } y = 1 \quad (\text{uforstyrret}) \quad (\text{A-14})$$

$$\frac{\partial p}{\partial n} = 0 \quad \text{for } (x, y) \in \Gamma_0 \quad (\text{heft}) \quad (\text{A-15})$$

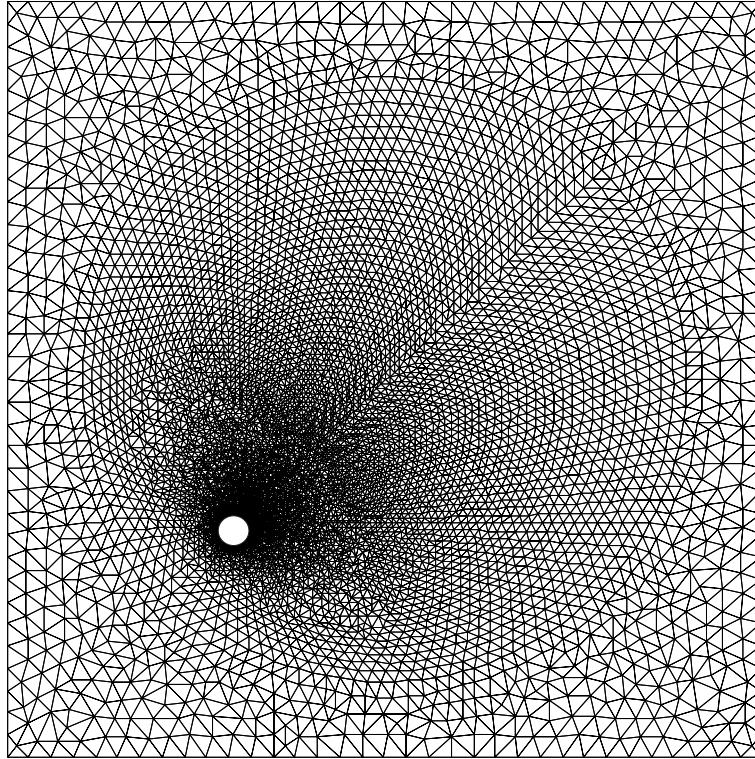
hvor  $c$ ,  $r$  og  $(x_0, y_0)$  er h.h.v. vindhastighet, radius og senter til strømningshinderet, og randa til strømningshinderet kan dermed beskrives ved

$$\Gamma_0 = \{(x, y) \mid x = x_0 + r \cos(s), y = y_0 + r \sin(s), 0 \leq s < 2\pi\}.$$

Ligningene (A-9), (A-10) og (A-11) blir referert til som h.h.v. *horisontal momentum-ligning*, *vertikal momentumligning* og *kontinuitetsligningen*. I ligningene (A-9) og (A-10), betegner  $\nu$  *kinematisk viskositet*.

Parameteren  $c$  i ligning (A-12) er av interesse for oss. Vi ønsker å vite hvor sensitiv tilstandsfunksjonene  $u$ ,  $v$  og  $p$  er for endringer i denne parameteren, d.v.s. for endringer i vindhastighet på innstrømsiden.





Figur 18: Meshet er en Delaunay-triangulering med fortetting inn mot strømningshindret og en kontrollkurverundt hovedparten av virvelgaten.

Merk at ligningene (A-9) og (A-10) er *symmetriske* på den måten at begge ligninger kan transformeres til den andre ved å benytte substitusjonene  $x \leftrightarrow y$  og  $u \leftrightarrow v$ . Det betyr at påstander om begge ligninger kan forenkles til påstander om bare den horisontale ligningen.

## B.2 Førsteordens sensitivitetsligninger for $c$

For å utlede førsteordens sensitivitetsligninger antar vi at det eksisterer en spesiell løsning  $(u^0, v^0, p^0)$  av Navier-Stokes ligninger (A-9)-(A-11), med randbetingelsene (A-12)-(A-15). Vi er interessert i de førstederiverte av tilstandsfunksjonene m.h.p. parameteren  $c$ . For å finne ligninger som sier noe om disse funksjonene oppfører seg differensierer vi ganske enkelt Navier-Stokes ligninger (med randbetingelser) m.h.p.  $c$  og bytter på differensieringsrekkefølgen slik at differensiering m.h.p. denne parameteren blir utført først. Vi innfører nå kortnotasjonen:

$$u_c \equiv \frac{\partial u}{\partial c} \quad v_c \equiv \frac{\partial v}{\partial c} \quad p_c \equiv \frac{\partial p}{\partial c} \quad (\text{A-16})$$

De differensierte randbetingelsene har samme form som de opprinnelige randbetingelsene, men med homogene høresider (unntaket er førsteordens sensitiviet for komponentene  $u$  og  $v$ ). Slik vil det være, uansett hvor mange ganger vi gjentar differensieringsprosessen.

Bruker vi kortnotasjonen ovenfor blir de resulterende differensierte Navier-Stokes lig-

ninger (A-9)-(A-11):

$$\frac{\partial u_c}{\partial t} + u \frac{\partial u_c}{\partial x} + v \frac{\partial u_c}{\partial y} - \nu \nabla^2 u_c + \frac{\partial p_c}{\partial x} = -u_x u_c - u_y v_c \quad (\text{A-17})$$

$$\frac{\partial v_c}{\partial t} + u \frac{\partial v_c}{\partial x} + v \frac{\partial v_c}{\partial y} - \nu \nabla^2 v_c + \frac{\partial p_c}{\partial y} = -v_x u_c - v_y v_c \quad (\text{A-18})$$

$$\frac{\partial u_c}{\partial x} + \frac{\partial v_c}{\partial y} = 0 \quad (\text{A-19})$$

med følgende randbetingelser

$$u_c = v_c = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{for } x = 0 \text{ \& } y = 0 \quad (\text{A-20})$$

$$u_c = v_c = 0 \quad \text{for } (x, y) \in \Gamma_0 \quad (\text{A-21})$$

$$\frac{\partial p_c}{\partial x} + \frac{\partial p_c}{\partial y} = 0 \quad \text{for } x = 1 \text{ \& } y = 1 \quad (\text{A-22})$$

$$\frac{\partial p_c}{\partial n} = 0 \quad \text{for } (x, y) \in \Gamma_0 \quad (\text{A-23})$$

### B.2.1 Iterasjon

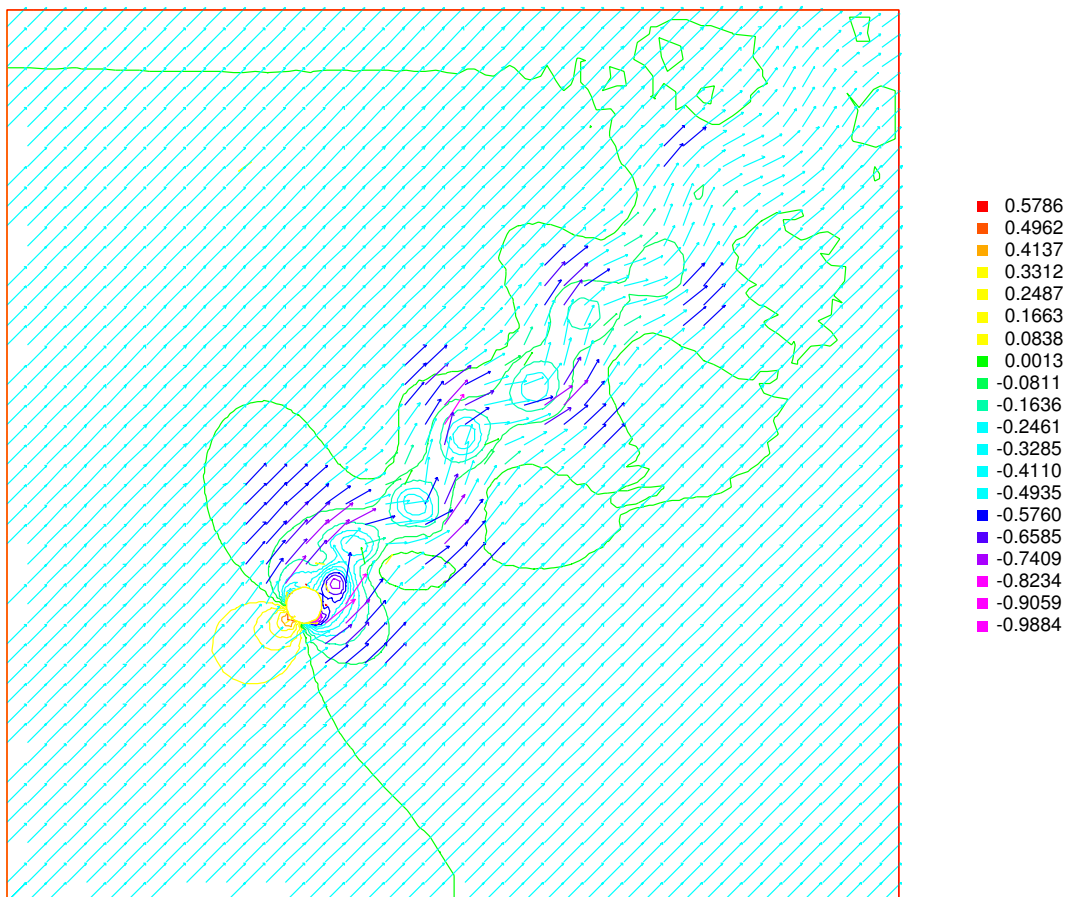
En viktig ting å merke seg er at venstresiden av ligningene (A-17) og (A-18) er identisk i form med strømningsligningene. Derfor er det naturlig å formulere følgende iterative prosedyre

$$\frac{\partial u_c^{(k)}}{\partial t} + u \frac{\partial u_c^{(k)}}{\partial x} + v \frac{\partial u_c^{(k)}}{\partial y} - \nu \nabla^2 u_c^{(k)} + \frac{\partial p_c^{(k)}}{\partial x} = -u_x u_c^{(k-1)} - u_y v_c^{(k-1)} \quad (\text{A-24})$$

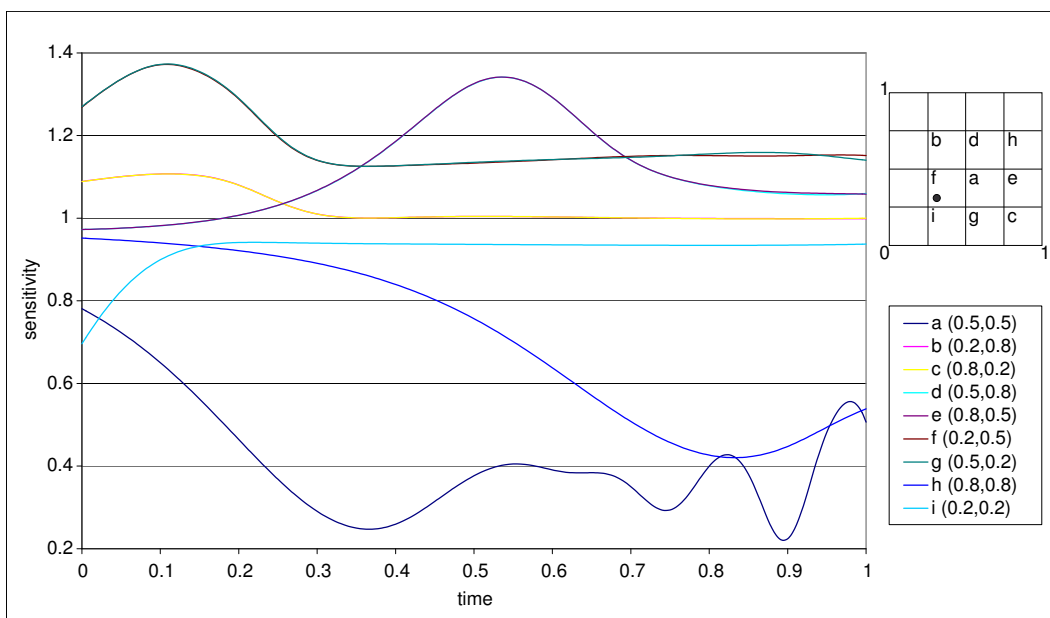
$$\frac{\partial v_c^{(k)}}{\partial t} + u \frac{\partial v_c^{(k)}}{\partial x} + v \frac{\partial v_c^{(k)}}{\partial y} - \nu \nabla^2 v_c^{(k)} + \frac{\partial p_c^{(k)}}{\partial y} = -v_x u_c^{(k-1)} - v_y v_c^{(k-1)} \quad (\text{A-25})$$

$$\frac{\partial u_c^{(k)}}{\partial x} + \frac{\partial v_c^{(k)}}{\partial y} = 0 \quad (\text{A-26})$$

siden vi da kan gjenbruke den samme koeffisientmatrisen til de diskretiserte systemet som for strømningsligningene. Eksperimenter viser at kun et fåtall iterasjoner er nødvendig for å oppnå "akseptabel konvergens".



Figur 19: Hastighet og trykk ved  $t = 2.0$ . Beregningene er utført med FreeFem+ (<http://www.freefem.org>)



Figur 20: Sensitivitet  $u_c(x_P, y_P)$  som funksjon av tid i forskjellige punkter  $P = a, b, \dots, i$ .